



Modélisation multiéchelles d'un contact rugueux viscoélastique lubrifié

Florian Mora

► To cite this version:

Florian Mora. Modélisation multiéchelles d'un contact rugueux viscoélastique lubrifié. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2014. Français. <NNT : 2014ISAL0007>. <tel-01368585>

HAL Id: tel-01368585

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01368585>

Submitted on 19 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

MODÉLISATION MULTIÉCHELLES D'UN CONTACT RUGUEUX VISCOÉLASTIQUE LUBRIFIÉ

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE LYON :
MÉCANIQUE, ÉNERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.)

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

par

Florian MORA

Thèse soutenue le 8 Janvier 2014 devant la commission d'examen :

Jury :	Dr.	Y.	LeChenadec	Encadrant industriel
	Pr.	A.A.	Lubrecht	Directeur de thèse
	Pr.	D.	Mazuyer	Examineur
	Pr.	G.	Poll	Rapporteur
	Dr.	P.	Sainsot	Co-Directeur de thèse
	Dr.	H.P.	Yin	Rapporteur

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'I.N.S.A. de Lyon

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGODOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 63 55 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEMNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Ford 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec : Samia VUILLERMOZ Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 Didier.revel@creatis.univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM	Mme Sylvie CALABRETTO Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 – Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.ec-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 – Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

La présence d'eau sur les revêtements routiers affecte l'adhérence des pneumatiques. Un film d'eau s'interpose entre le pneumatique et la rugosité du sol entraînant d'abord une perte de l'adhérence par adhésion provenant du contact direct gomme-sol. Ensuite, la réduction de la déformation de la gomme induit une diminution de l'adhérence par indentation. C'est ce second aspect qui est l'objet de la présente étude.

Le film d'eau génère une portance par un phénomène de lubrification qui diminue la déformation du pneumatique et ainsi son adhérence.

Cette étude est basée sur une théorie prédisant la diminution de l'amplitude de la rugosité en fonction des propriétés des surfaces et des conditions de contact. L'équation de Reynolds est résolue par des techniques de calcul efficaces. La viscoélasticité est implémentée dans les calculs de contact sec et lubrifié.

L'objectif de cette étude est de proposer un modèle de prédiction de la diminution de l'adhérence d'un pneumatique sur sol mouillé. La meilleure compréhension du contact permettra d'améliorer le choix du matériau composant les bandes de roulements des pneumatiques.

Mots-clés : contact ponctuel, contact sec, lubrification, EHD, élastohydrodynamique, viscoélasticité, VEHD, viscoélastohydrodynamique, Reynolds, multigrilles, multi-intégration, réduction d'amplitude, adhérence, coefficient de frottement, frottement hystérétique, sol routier, dimension fractale

Abstract

Water presence on road affects tyre friction. A water film interposed between tyre and road asperities results first in a loss of adhesion friction coming from the direct contact between rubber and road. Then, the rubber deformation reduction leads to a diminution of the hysteretic friction. This study focuses on this last topic.

The water film generates a hydrodynamic force by a lubrication phenomenon which decreases rubber deformation and friction.

This study is based on a theory which predicts roughness amplitude reduction as a function of surface properties and contact conditions. Reynolds equation is solved using efficient computing methods. Viscoelasticity is implemented in dry and lubricated calculations.

The aim of this research is to suggest a predictive model of the tyre friction decrease on wet roads. A better understanding of the contact will enable to improve the tyre tread material design.

Keywords : point contact, dry contact, lubrication, EHL, elastohydrodynamic, viscoelasticity, VEHD, viscoelastohydrodynamic, Reynolds, multigrid, multi-integration, amplitude reduction theory, friction, friction coefficient, hysteretic friction, road surface, fractal dimension

Avant-propos

Je remercie grandement Pr Ton Lubrecht et Dr Philippe Sainsot pour leur encadrement sans relâche au cours de ces trois années. Leur disponibilité, leur intérêt et leur compétence scientifique ont fortement contribué à la réussite de cette thèse. Je remercie aussi Dr Nans Biboulet pour son aide ponctuelle et efficace.

Je remercie la société Michelin de m'avoir fait confiance et d'avoir soutenu ce projet. Je remercie aussi Dr Yohan LeChenadec pour son encadrement, son aide et ses conseils qui ont permis l'aboutissement concret de ce travail.

Je remercie mes rapporteurs Dr H.P. Yin et Pr G. Poll pour leur travail de révision ainsi que Pr D. Mazuyer en tant qu'examineur.

Je tiens à remercier mes différents co-bureaux avec qui j'ai passé des moments conviviaux et qui ont rendu ces trois années plus agréables : Hafedh "Le Colonel", Mathieu "BG", Hugo, Jing, Ghizlane, Amina, Laure, Florence,... Je remercie aussi tous les autres compagnons que j'ai côtoyés.

Enfin, je remercie ma mère et Françoise pour leur précieux travail de relecture.

Ce travail est dédié à ma famille et à Emmanuelle pour m'avoir soutenu et encouragé tout au long de cette thèse.

Table des matières

Notation	1
1 Introduction générale	5
1.1 Fonctionnement du pneumatique	6
1.2 Les phénomènes d'adhérence	8
1.3 La viscoélasticité	9
1.4 L'adhérence sur sol mouillé	10
1.5 Objectifs - hypothèses	11
2 Contact sec viscoélastique	13
2.1 Introduction	13
2.2 Bibliographie	13
2.3 Modèle viscoélastique de Zener	15
2.4 Modélisation du problème de contact sec élastique	17
2.5 Contact viscoélastique transitoire par MultiGrille	19
2.5.1 Modèle viscoélastique en sollicitation temporelle	19
2.5.2 Résolution du contact transitoire par technique MultiGrille	21
2.5.3 Résultats	24
2.6 Contact viscoélastique en régime permanent par FFT	25
2.6.1 Modèle viscoélastique en régime permanent	25
2.6.2 Résolution du contact en régime permanent par FFT	26
2.6.3 Résultats	27
2.7 Comparaison avec le cas élastique	28
2.7.1 Comparaison sans glissement	28
2.7.2 Comparaison avec glissement	29
2.8 Conclusion	29
3 Contact lubrifié mou et viscoélastique	31
3.1 Introduction	31
3.2 Bibliographie	31
3.3 Lubrification élastohydrodynamique - équation de Reynolds	33
3.4 Lubrification viscoélastohydrodynamique transitoire par MultiGrille	36
3.4.1 Résolution du contact VEHD	36
3.4.2 Technique MultiGrille appliquée au contact VEHD	38
3.4.3 Convergence du code de contact VEHD	40
3.5 Lubrification viscoélastohydrodynamique en régime permanent par FFT	40
3.6 Résultats	42
3.6.1 Contact VEHD transitoire par MultiGrille	42
3.6.2 Contact VEHD en régime permanent par FFT	45

3.7	Conclusion	47
4	Contact lubrifié EHD rugueux	49
4.1	Introduction	49
4.2	Bibliographie	49
4.3	Théorie et modélisation	51
4.4	Résultats	53
4.5	Extension à la viscoélasticité	56
4.6	Conclusion	58
5	Diminution de l'adhérence de la gomme sur sol mouillé	59
5.1	Introduction	59
5.2	Bibliographie	59
5.2.1	Caractéristiques du sol routier	59
5.2.2	Phénomènes de perte d'adhérence sur sol mouillé	61
5.2.3	Méthodes de calcul du coefficient de frottement	64
5.3	Étude du contact gomme-sol routier	65
5.3.1	Mesure du sol routier	66
5.3.2	Étude numérique du contact	70
5.4	Diminution de l'adhérence sur sol mouillé par la théorie de réduction d'amplitude . .	78
5.4.1	Hypothèses	78
5.4.2	Vérification de la prédiction par la TRA	80
5.4.3	Calcul du coefficient de frottement	83
5.4.4	Application et compréhension	84
5.5	Conclusion	101
6	Conclusion générale	103
A	Étude de la convergence du code de calcul VEHD	115
B	Comparaison des résultats du contact sec viscoélastique avec Greenwood	121
C	Relation entre les modèles de viscoélastiques de Maxwell et de Zener généralisés	125

Notation

α	index de viscosité [Pa ⁻¹]
$\bar{\alpha}$	index de viscosité adimensionné [.] = αp_H
δ	correction [.]
$\langle \delta \rangle$	épaisseur excitée du pneumatique [m]
ΔP	différence de pression adimensionnée [.]
η	viscosité [Pa.s]
$\bar{\eta}$	viscosité adimensionnée [.] = η/η_0
η_0	viscosité à pression ambiante [Pa.s]
λ	longueur d'onde de la rugosité [m]
$\bar{\lambda}$	paramètre de l'équation de Reynolds [.] = $12u_m\eta_0R_x^2/(b^3p_H)$
∇	paramètre adimensionné de longueur d'onde [.] = $\lambda/a \cdot \sqrt{M}$
$\bar{\nabla}$	paramètre adimensionné de longueur d'onde revu [.] = $\lambda/a \cdot \sqrt[3]{M}$
$\bar{\bar{\nabla}}$	paramètre adimensionné de viscoélasticité monobranche [.] = $V_g \cdot \tau \cdot (f + 1)$
$\bar{\bar{\nabla}}_2$	paramètre adimensionné de viscoélasticité multibranche [.] = $V_g/K \cdot (\tau_1 \cdot K_1 + \tau_2 \cdot K_2)$
∇_H	paramètre adimensionné de longueur d'onde de Hooke [.] = $\frac{\lambda}{b \cdot g_3^{7/2}}$
μ	coefficient de frottement [.]
ν_1, ν_2	coefficient de Poisson pour les solides 1 et 2 [.]
ω	pulsation [rad/s] = $2\pi f$
$\omega_{jac,gs}$	coefficient de sous-relaxation [.]
Ω	domaine d'intégration [.]
ρ	densité [kg/m ³]
ρ_0	densité à pression ambiante [kg/m ³]
$\bar{\rho}$	densité adimensionnée [.] = ρ/ρ_0
$\kappa_{i,j}$	coefficient d'influence [.]
σ	contrainte [Pa]
σ_0	contrainte normale totale [Pa]
σ_{RMS}	moyenne quadratique de rugosité [m]
$\tan \delta$	facteur de perte [.] = E''/E'
τ, τ_i	temps de relaxation [s]
ΔT	pas de temps adimensionné [.]
Δt	pas de temps [s]
ξ	coefficient adimensionné dans l'équation de Reynolds [.]
$\xi_{\perp}, \xi_{ }$	paramètres de surface de Klüppel [m]

a	demi rayon de contact Hertzien [m]
A	matrice de relaxation par ligne
A_d	déformation de la rugosité adimensionnée [.]
A_i	amplitude initiale de la rugosité adimensionnée [.]
a_i	amplitude initiale de la rugosité [m]
d	distance moyenne entre le caoutchouc et la surface [m]
D_f	dimension fractale [.]
E_1, E_2	modules d'Young pour les solides 1 et 2 [Pa]
E_0, E_1	modules viscoélastiques [Pa]
E'	module d'Young équivalent [Pa]
E'	module viscoélastique de stockage [Pa]
E''	module viscoélastique de perte [Pa]
E^*	module du module complexe viscoélastique de perte [Pa] = $\sqrt{E'^2 + E''^2}$
f	membre de droite [.]
f	rapport de viscoélasticité [.]
f	fréquence [Hz]
$F_{3/2}$	fonction de Greenwood-Williamson [.]
\mathcal{F}	transformée de Fourier [.]
E_0, E_∞	modules de traction-compression viscoélastique [Pa]
G_0, G_∞	modules de cisaillement viscoélastique [Pa]
G'	module de cisaillement viscoélastique de stockage [Pa]
G''	module de cisaillement viscoélastique de perte [Pa]
h	épaisseur de film [m]
h_c	épaisseur de film au centre [m]
h_X, h_Y	pas d'espace adimensionné [.]
h_T	pas de temps adimensionné [.]
H	épaisseur de film adimensionné [.] = hR_x/a^2
H_0	approche de solide rigide adimensionnée [.]
H_c	épaisseur de film centrale adimensionné [.]
H_{min}	épaisseur de film minimale adimensionné [.]
H^M	épaisseur de film de Moes [.]
i, j	index d'espace [.]
I_h^H, I_H^h	opérateurs de restriction et d'interpolation
K, K_i	raideur au temps infini viscoélastique [Pa]
$K_{i,i',j,j'}$	noyaux élastiques [.]
L	paramètre de matériau de Moes [.] = $\alpha E' \cdot ((2\eta_0 u_m)/(E' R_x))^{1/4}$
M	paramètre de charge de Moes [.] = $w/(E' R_x^2) \cdot ((2\eta_0 u_m)/(E' R_x))^{-3/4}$
n_X, n_Y	nombre de point suivant X et Y [.]
p	pression [Pa]
P	pression adimensionnée [.] = p/p_H
p_H	pression d'Hertz maximale [Pa]
q	vecteur d'onde [mm^{-1}] = $2\pi/\lambda$
$S(\omega)$	densité spectrale de puissance [m^4]
r	terme des résidus [.]
r	rayon [m] = $\sqrt{x^2 + y^2}$
R	rayon adimensionné [.]

R_x, R_y	rayon de courbure réduit [m]
t	temps [s]
T	temps adimensionné [.] = $t u_m/a$
u	vitesse [m/s]
u_m	moyenne des vitesses [m/s]
u_e, u_{e_i}	déformation élastique [m]
u, u_v	déformation viscoélastique [m]
U_e	déformation élastique adimensionnée [.]
U, U_v	déformation viscoélastique adimensionnée [.]
u_s	vitesse d'entraînement [m/s]
v, V_g	vitesse de glissement [m/s]
\bar{v}	vitesse de rotation adimensionnée [.]
V	spectre de déformation du pneumatique [m]
w_r, w_f	terme des résidus de la charge [.]
w	charge [N]
W	charge adimensionnée [.]
x, y, z	coordonnées [m]
X, Y, Z	coordonnées adimensionnées [.] = $x/a, = y/a, = z/a$
X_a, X_b	frontières du domaine adimensionnées suivant X [.]
Y_a, Y_b	frontières du domaine adimensionnées suivant Y [.]
\bigcirc^{sec}	sec
\bigcirc^{lub}	lubrifié
\bigcirc^h	grille fine
\bigcirc^H	grille grosse
\bigcirc^{fil}	filtré par la TRA
\bigcirc^{pe}	piezovisqueux élastique
$\bigcirc^{ie}, \bigcirc^{ie}$	isovisqueux élastique
\bigcirc^{iv}	isovisqueux viscoélastique
\bigcirc^{lisse}	lisse
\bigcirc^{rug}	rugueux
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EHD	ElastoHydroDynamique
VEHD	ViscoElastoHydroDynamique
FFT	Transformée de Fourier Rapide
SRR	Taux de Roulement-Glisement
TRA	Théorie de Réduction d'Amplitude

Chapitre 1

Introduction générale

L'automobile a révolutionné le transport. Inventée en 1769 par Cugnot et rendue accessible au plus grand nombre en 1908 par Ford grâce au modèle T, l'automobile a permis un accroissement du développement industriel général et de la mobilité des personnes.

Les premières automobiles utilisaient des roues de charrettes composées d'une structure en bois et d'une bande de roulement d'abord en fer puis en caoutchouc. Le premier pneumatique en caoutchouc a été inventé par John Boyd Dunlop en 1889 et appliqué à la roue de vélo. Edouard et André Michelin ont ensuite incorporé une chambre à air pour accélérer sa réparation. Ces inventions se sont rapidement répercutées aux pneumatiques d'automobile. Par la suite, de nombreuses inventions ont amélioré les performances du pneumatique comme le pneu sans chambre à air par Edward Brice Killen en 1929 et la carcasse radiale par Michelin en 1946.

L'automobile est devenue accessible au plus grand nombre au cours du *XX^{ème}* siècle. Actuellement, 38 millions de voitures sont en circulation en France et plus d'un milliard dans le monde. Associée à des infrastructures routières basiques, des sécurités active et passive faibles ainsi qu'à des règles de conduite insuffisantes, l'automobile est une cause d'accidents et de mortalité très importante. De nombreux travaux ont été menés depuis les années 70 pour améliorer chacun de ces domaines.

En particulier, la sécurité active est définie comme étant la faculté d'une automobile à éviter un accident. Le pneumatique qui est le seul élément reliant le véhicule à la route en est le point capital. Il est donc primordial que ce composant soit étudié attentivement.

Le pneumatique répond à de nombreux critères de performance, qui sont entre autres :

- l'adhérence ;
- la durée de vie ;
- la résistance au roulement, la consommation ;
- le confort ;
- le bruit ;
- la masse ;
- etc...

Il doit en plus être constant face aux variations des nombreux paramètres de fonctionnement, comme :

- la température extérieure ;
- la présence d'éléments perturbateurs, comme l'eau ou la poussière ;
- le type de revêtement ;
- le modèle d'automobile ;
- le type de conduite ;

- son niveau d'usure ;
- son âge ;
- etc...

De nombreuses performances sont antagonistes, c-à-d qu'améliorer une performance va en diminuer une autre. Par exemple, améliorer l'adhérence sur sol mouillé va généralement augmenter la résistance au roulement en situation de conduite normale et de fait augmenter la consommation en carburant du véhicule. Il est donc compréhensible que le pneumatique doive répondre à un équilibre entre ces différentes performances. La recherche a pour but de pouvoir améliorer ce compromis par une meilleure compréhension de certains phénomènes ou par l'évolution de la technologie.

La conduite sur sol mouillé est un facteur accidentogène qui entraîne en moyenne des conséquences graves d'un point de vue corporel. Les accidents sur sol mouillé représentent, en France, 13.4% des accidents corporels routiers. Pour guider le client, l'Union Européenne a instauré une notation de trois performances du pneumatique, visible grâce une étiquette. Ces trois performances sont la résistance au roulement, l'adhérence sur sol mouillé et le bruit. Il est donc primordial d'améliorer l'adhérence sur sol mouillé, à la fois par sécurité et aussi pour des raisons de législation.

1.1 Fonctionnement du pneumatique

La figure 1.1 montre que le pneumatique est un assemblage de nombreux composés de gommages et de renforts. Chaque ensemble a une fonction propre. La bande de roulement est la partie en contact avec la route ; elle est celle qui permet de créer le phénomène d'adhérence. La nappe carcasse, les renforts et la gomme d'étanchéité permettent de soutenir correctement la bande de roulement avec la jante et de lui transmettre ses efforts. Enfin, les nappes permettent au pneumatique d'avoir une rigidité contrôlée pour que la bande de roulement soit en contact de manière optimale avec la route.

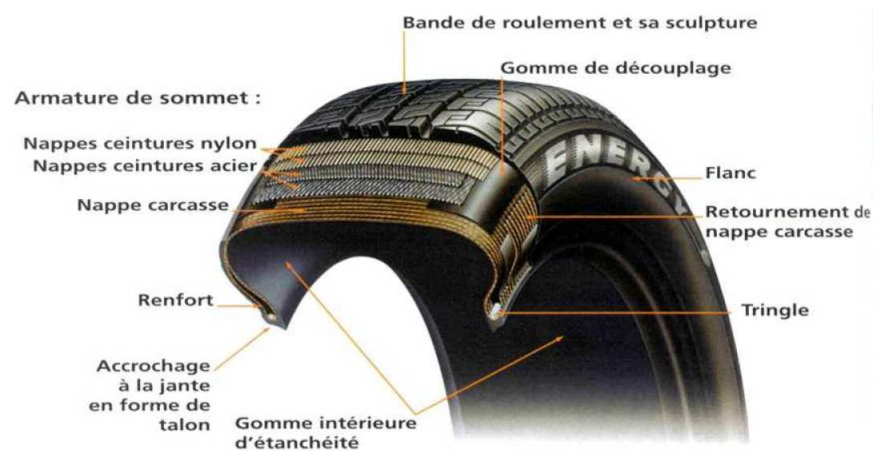


FIGURE 1.1: Composition du pneumatique d'un véhicule de tourisme

Le pneumatique est soumis à différentes formes de sollicitations. Concernant l'adhérence, la sollicitation peut être longitudinale comme en phase de freinage ou d'accélération ; elle peut être aussi transversale lors d'une prise de virage. Le pneumatique possède un potentiel d'adhérence représenté par le cercle d'adhérence dans la figure 1.2. Même si la représentation est simplifiée, le potentiel d'adhérence reste proche de la résultante des efforts longitudinaux (suivant X) et transversaux (suivant Y).

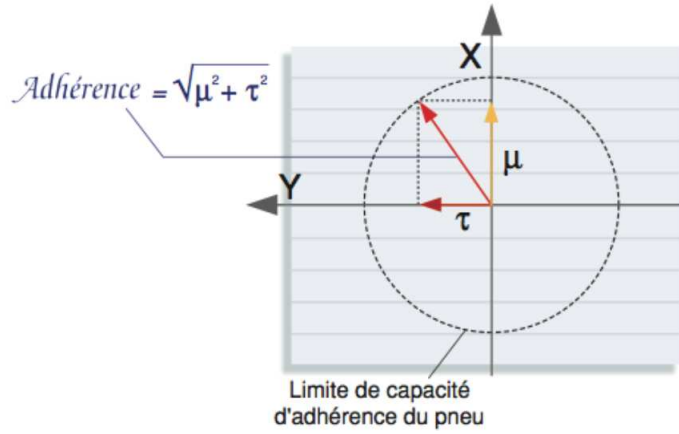


FIGURE 1.2: Cercle d'adhérence du pneumatique

Pour obtenir de l'adhérence, le pneumatique doit avoir une vitesse de roulement différente de celle du véhicule. Le taux de glissement est défini par :

$$SRR = \frac{\omega \cdot R - V}{V} \quad (1.1)$$

où V est la vitesse du véhicule, R le rayon de la roue et ω la vitesse de rotation de la roue.

Ce phénomène de glissement est représenté dans la figure 1.3. On remarque que les pains de gomme à l'entrée du contact sont en cisaillement. Une fois l'effort de cisaillement supérieur au frottement statique du pain de gomme, ce dernier se met à glisser. L'énergie dissipée et les efforts de frottements sont alors proportionnels à la longueur glissée.

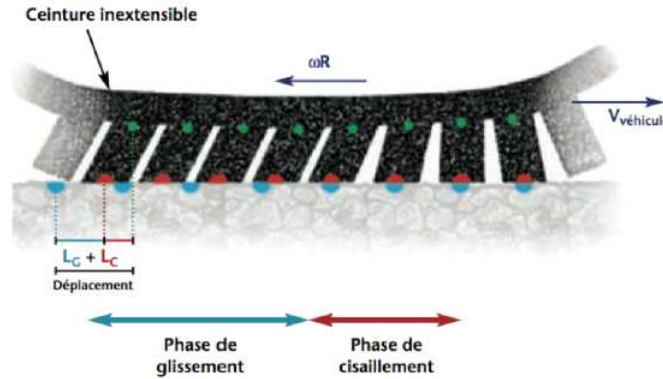


FIGURE 1.3: Vue en coupe du pneumatique ayant un certain taux de glissement

Le coefficient de frottement est donc fonction du taux de roulement-glissement comme le montre la figure 1.4. On remarque que l'adhérence maximale est obtenue entre 5 et 15% de glissement ; au-delà, les propriétés viscoélastiques ainsi que l'échauffement dû au frottement diminuent le coefficient de frottement. Les systèmes anti-blocage de roue (ABS) permettent de trouver le taux de glissement optimal grâce à des capteurs d'accélération du véhicule et des capteurs de vitesse de rotation de chaque roue.

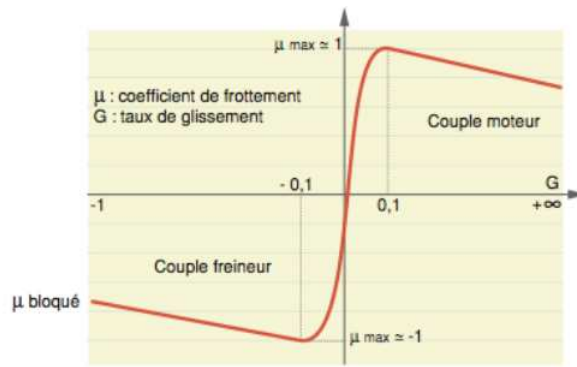


FIGURE 1.4: Coefficient de frottement μ en fonction du taux de glissement G

1.2 Les phénomènes d'adhérence

L'adhérence de la gomme provient de deux phénomènes qui sont l'adhérence par indentation, appelé frottement hystérétique, et l'adhérence par adhésion.

L'adhérence par indentation vient de la déformation du pain de gomme sur les rugosités de l'asphalte routier. Le matériau du pneumatique étant viscoélastique, la dissipation engendrée par la déformation crée une résultante de force dirigée dans le sens opposé à la vitesse de glissement et donc à la direction du véhicule. Cette résultante des forces est visible par la flèche bleu ciel dans la figure 1.5 ; elle provient du champ de pression de contact en vert.



FIGURE 1.5: Vue en coupe du phénomène d'adhérence par indentation

L'adhérence par adhésion provient du contact direct entre le sol et le pain de gomme. Le phénomène fonctionne suivant 3 phases visibles sur la figure 1.6 :

- ① une liaison de type Van der Waals se crée entre la gomme et le sol ;
- ② la gomme est étirée et génère un effort de rétention dans le sens opposé au glissement ;
- ③ la liaison se rompt pour se reformer plus loin.

Ce phénomène apparaît à des échelles de rugosité du sol très faibles, inférieures au μm . La fréquence d'excitation du matériau du pneumatique se situe alors entre $10^6 Hz$ et $10^9 Hz$.

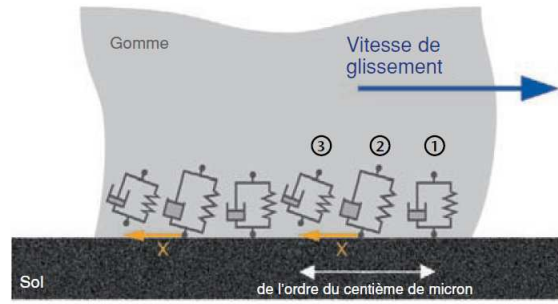


FIGURE 1.6: Vue en coupe du phénomène d'adhérence par adhésion

1.3 La viscoélasticité

Il a été montré que les deux phénomènes de création de l'adhérence utilisent la propriété de viscoélasticité de la gomme de la bande de roulement [Gro63].

La viscoélasticité repose sur la combinaison des propriétés d'élasticité et de viscosité. Le comportement d'un matériau viscoélastique est donc intermédiaire entre un matériau solide purement élastique et un fluide purement visqueux. Physiquement, le caractère viscoélastique provient d'une interaction entre les chaînes macromoléculaires qui constituent le matériau de la gomme.

On peut représenter le module viscoélastique par un nombre complexe E^* composé d'un module élastique E' , appelé module de stockage, et d'un module visqueux E'' , appelé module de perte :

$$E^* = E' + iE'' \quad (1.2)$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Le module E' stocke complètement l'énergie élastique, alors que le module E'' dissipe totalement l'énergie visqueuse. Le rapport entre ces deux modules est le facteur de perte $\tan \delta$:

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (1.3)$$

Lorsque le facteur de perte est à son maximum, le matériau dissipe le plus d'énergie et donc peut obtenir le maximum du coefficient de frottement.

La sollicitation dynamique d'un matériau viscoélastique est comparée à celle d'un matériau purement élastique dans la figure 1.7 [BL07]. Le graphique représente la contrainte σ en fonction de l'élongation ϵ . Le matériau viscoélastique décrit une ellipse alors que le matériau élastique décrit une droite. Ce graphique montre le déphasage entre la contrainte et l'élongation maximale pour le matériau viscoélastique. L'aire de l'ellipse correspond à l'énergie dissipée.

Les propriétés du matériau viscoélastique dépendent fortement de sa fréquence d'excitation et de sa température. Pour un polymère ou des composés utilisés sur les bandes de roulement des pneumatiques, les propriétés varient autour de deux comportements distincts comme le montre la figure 1.8. Le matériau est du Styrène Butadiène non-chargé, matériau couramment employé dans les bandes de roulement des pneumatiques. Le module de stockage et le module de perte sont affichés en fonction de la fréquence d'excitation. On repère deux asymptotes sur le module de stockage. A hautes fréquences, le matériau est très rigide, on dit qu'il est sur le plateau vitreux. Alors qu'à basses fréquences, le matériau est très souple, on dit qu'il est sur le plateau caoutchoutique. Le

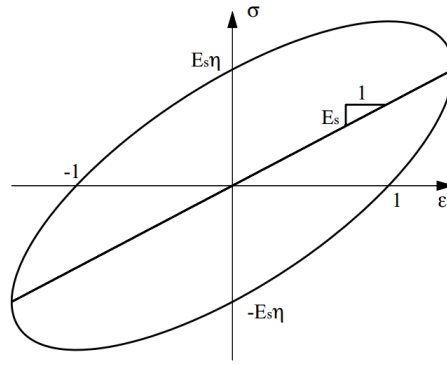


FIGURE 1.7: Relation contrainte-élongation de matériaux viscoélastique et élastique [BL07], où E_s est le module de stockage et η le facteur de perte.

facteur de perte présente un maximum atteint environ au milieu de la zone de transition du module de stockage. C'est dans cette zone de transition que le matériau présente son plus fort caractère visqueux.

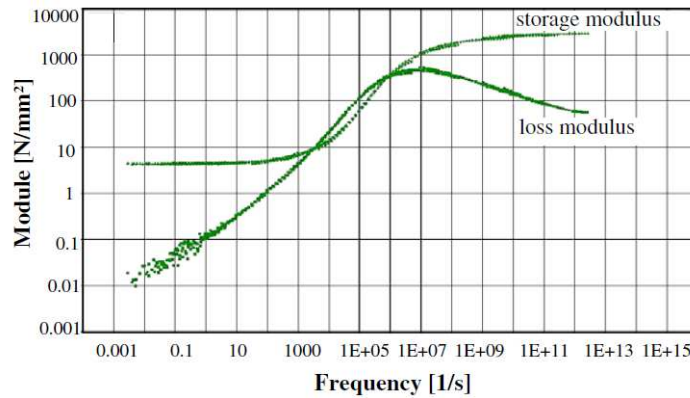


FIGURE 1.8: Modules de stockage et de perte en MPa en fonction de la fréquence en Hz [WR09].

Concernant la température, le matériau réagit similairement mais en sens opposé. Pour une fréquence fixe, à basse température, son comportement est vitreux et à haute température son comportement est caoutchoutique. La zone de transition se situe à une température que l'on nomme température de transition vitreuse T_g .

Cette similarité a permis de créer une loi d'équivalence fréquence-température par Williams, Landel et Ferry, appelée loi WLF [WLF55]. Cette loi, voir équation 1.4, exprime le facteur de translation a_T qui permet de déterminer les propriétés du matériau viscoélastique à n'importe quelle température T , à partir des données obtenues à une température T_0 .

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \quad (1.4)$$

1.4 L'adhérence sur sol mouillé

La présence d'eau sur l'asphalte routier perturbe le contact de la bande de roulement. L'eau s'interpose entre le pain de gomme et le sol suivant différents mécanismes. La séparation du pain de gomme du sol entraîne inévitablement l'annulation de l'adhérence par adhésion. Les différentes zones créées sont montrées dans la figure 1.9.

À l'entrée du contact, le pain de gomme se trouve en zone hydrodynamique. Le convergent créé par la forme cylindrique du pneumatique engendre un effet d'hydroplanage. Ce phénomène est à éviter car il crée une portance qui soulève le pneumatique et le sépare du sol. Ce phénomène est très présent lorsqu'il y a une couche d'eau en surface de l'asphalte et lorsque la vitesse du véhicule est importante ($\geq 80 \text{ km/h}$). Le phénomène est induit par l'inertie de l'eau qui, par le temps qu'elle met à sortir de la zone de contact du pneu, crée une force de portance. Pour le contrer, la bande de roulement est entaillée et la sculpture créée permet de diriger l'eau vers l'extérieur de la zone de contact.

Sur la zone de contact centrale, le pneumatique est en zone mixte sèche et humide ; c-à-d que le pain de gomme peut être directement en contact ou encore séparé par une fine couche d'eau. On peut considérer que le contact gomme-sol fonctionne dans un régime de lubrification limite. L'effet de viscosité de l'eau devient prépondérant face à son inertie.

La forme des pains de gomme joue un rôle très important, puisque leur flexion va permettre la mise en contact de l'arête du pain avec le sol. Cette géométrie de contact va engendrer des pressions importantes qui permettront d'augmenter la déformation de la gomme. De même, l'entaillage de la bande de roulement permet de réduire le temps de transfert de l'eau entre la surface du pain de gomme et une rainure d'évacuation. Il faut évidemment effectuer un compromis entre taux d'entaillage, rigidité des pains de gomme et taux de contact. On retrouve ici l'antagonisme entre l'adhérence sur sol sec face à l'adhérence sur sol mouillé.

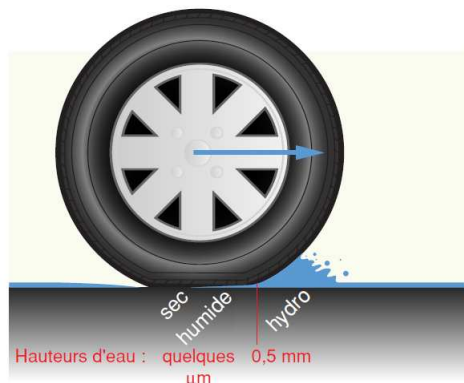


FIGURE 1.9: Représentation du pneumatique sur sol mouillé avec 2 zones de contact.

1.5 Objectifs - hypothèses

Les conditions de contact de la gomme sur un sol mouillé sont très variées. La présente étude s'est concentrée sur la zone de contact centrale. Elle a étudié l'impact du film d'eau sur la diminution de la déformation de la gomme en contact avec le sol, ce qui affecte l'adhérence par indentation. L'adhérence par adhésion n'a donc pas été prise en compte.

La modélisation de l'augmentation de température est prépondérante dans le cas de l'adhérence sur sol sec. Dans le cas mouillé, l'eau évite le contact direct et évacue la chaleur. La température ne sera donc qu'une constante dans cette étude.

De nombreuses procédures de tests expérimentaux existent, mais elles ne mesurent que des grandeurs de sortie, principalement le coefficient de frottement. Elles ne permettent donc pas de déterminer les conditions in situ du contact, c-à-d la pression ou la hauteur de film d'eau à des échelles microscopiques. Ainsi, il est difficile de comprendre les phénomènes physiques entrant en jeu. Les outils numériques présentent l'avantage de pouvoir accéder à tous les paramètres influents et à toutes les

grandeurs physiques.

Cette étude a pour but de créer un outil numérique, basé sur la théorie de réduction d'amplitude, afin de tenter d'expliquer la diminution du coefficient de frottement sur sol mouillé. Cette théorie permet de décrire la diminution de la déformation d'un solide due à la rugosité dans un contact lubrifié. Elle a été validée dans d'autres domaines comme celui des roulements à billes. Cette thèse vise donc à étendre cette théorie au problème de contact gomme-sol routier. A partir des résultats, il sera alors possible d'améliorer la conception des matériaux de la bande de roulement pour la performance d'adhérence sur sol mouillé.

Le chapitre 1 présente le contexte de l'étude, des bases sur le pneumatique ainsi que la provenance de l'adhérence de la gomme. Les objectifs de l'étude et ses limitations sont ensuite expliqués.

Le chapitre 2 présente le problème de contact sec viscoélastique qui va servir de base pour le cas lubrifié. Les principales équations et les techniques numériques sont posées. Plusieurs résultats sont présentés pour aider à la compréhension du contact viscoélastique en comparant les cas secs viscoélastique et élastique.

Le chapitre 3 étudie le contact mou lubrifié élastique et y ajoute la viscoélasticité. Ce travail permet de créer l'outil qui servira à l'extension de la théorie de réduction d'amplitude. Il montre les principales équations et les techniques numériques employées. La recherche pour l'amélioration du code de calcul est développée afin d'accroître sa robustesse. Plusieurs résultats comparent le cas viscoélastique lubrifié aux cas sec viscoélastique et lubrifié élastique.

Le chapitre 4 montre l'extension de la théorie de réduction d'amplitude au cas mou élastique isovisqueux. Il reprend les techniques de calculs du chapitre 3 et les utilise pour créer une loi analytique de la réduction d'amplitude en fonction des paramètres du contact. Le non-passage au cas viscoélastique est ensuite expliqué.

Le chapitre 5 établit d'abord une revue bibliographique concernant les caractéristiques du sol routier, les théories de réduction de l'adhérence sur sol mouillé et les types de calcul du coefficient de frottement. Ensuite, les différentes mesures des sols sont comparées grâce à plusieurs outils. Puis le contact sur le sol est étudié numériquement pour trouver les caractéristiques prépondérantes du sol. Enfin, la théorie de réduction d'amplitude est appliquée et la diminution du coefficient de frottement est calculée. Les impacts de la vitesse de glissement, de la charge et de la viscosité du fluide y sont décrits.

Le chapitre 6 présente un résumé des résultats et les perspectives de l'étude.

Chapitre 2

Contact sec viscoélastique

2.1 Introduction

Le matériau à l'interface du contact gomme-chaussée est clairement défini. Il s'agit d'un composé de polymères appelé élastomère ou par abus de langage caoutchouc, de par sa composition en partie constituée de caoutchouc.

Le principal facteur de l'adhérence de la gomme provient de la faculté de l'élastomère à dissiper de l'énergie, ce phénomène étant dû à la propriété viscoélastique du matériau. Cette dissipation d'énergie est engendrée par la déformation de la gomme sur les rugosités du sol routier comme montré dans la figure 2.1.

Ce chapitre présente d'abord différentes méthodes de calcul appliquées au contact sec, ainsi que différents modèles viscoélastiques. Dans un second temps, la viscoélasticité est appliquée à des cas de contacts non lubrifiés et quasi-idéaux à partir de deux méthodes numériques : le MultiGrille transitoire et la transformée de Fourier rapide. Enfin, sont présentées des comparaisons entre contacts élastique et viscoélastique.



FIGURE 2.1: a) *Distribution de pression de contact*, b) *Zoom sur l'indentation de la route sur le pain de gomme*.

2.2 Bibliographie

Le contact sec de matériaux viscoélastiques a été largement étudié dans la littérature.

Il existe de nombreuses techniques de calcul. La méthode la plus directe consiste à utiliser un logiciel du commerce par éléments finis. Mais l'emploi d'éléments 2D [BP02] et [SL05] ou 3D rend les

calculs coûteux en temps et en espace mémoire. Palfi et al [PBGV08, PGV11] étudièrent, à partir d'un modèle viscoélastique non linéaire composé d'éléments 2D, l'influence sur le coefficient de frottement du nombre d'échelles de rugosité et de la température. En 2009, ils montrèrent qu'il faut un modèle matériau de Maxwell généralisé comprenant de nombreuses branches pour représenter un comportement réaliste sur une grande plage de fréquence d'excitations. Une corrélation avec la prédiction analytique de Greenwood-Tabor [GT58] n'a pas été concluante à cause de la difficulté d'obtention des paramètres de cette loi. Ensuite [PGV⁺12], ils utilisèrent une modélisation 2D du matériau viscoélastique d'une longueur égale à la plus grande longueur d'onde de la rugosité et avec des conditions aux limites de répétition en déplacement.

Wriggers et al. [WN07] employèrent une méthode d'homogénéisation multi-échelle utilisant des calculs E.F. et statistiques pour pouvoir étudier le contact du pain de gomme d'une échelle allant du millimètre au micromètre. Ce principe repose sur le calcul de la plus petite échelle qui appliquera les contraintes moyennées sur l'élément représentatif de surface de l'échelle supérieure. L'étude [WR09] est plus simple car il n'y a plus un transfert des contraintes mais un coefficient de frottement provenant de l'échelle inférieure qui est appliqué sur la surface en contact.

De nombreuses autres méthodes ont été développées, notamment numériques par Yandell [Yan71], analytiques par Moore [MG74] et Persson [Per01] et, plus couramment, à l'aide d'éléments de frontière semi-analytique par Greenwood [Gre10].

Une des premières méthodes vient de Radok [Rad57], où le module élastique est remplacé par un module viscoélastique. Cependant, cette méthode présente des erreurs quand le rayon de contact décroît. Par la suite, Ting [Tin66] et Graham [Gra67] ont résolu le problème dans le cas du déchargement. Ont suivi différentes méthodes, notamment celles de Johnson [Joh85]. A partir de ces travaux, Greenwood [Gre10] a établi une méthode très simple pour résoudre le problème entre un indenteur axisymétrique et un massif semi-infini viscoélastique. Le principe de cette méthode repose sur la superposition des solutions de l'indentation par des cylindres de rayon différent. Une comparaison montrant une très bonne correspondance avec le travail effectué ici est présentée dans l'annexe B. Kozhevnikov et al. [KCD⁺08], pour une géométrie quelconque, proposèrent une méthode basée sur la méthode d'inversion de la matrice dans le cas élastique [Joh85]. La résolution de cette méthode se révélant lourde, Dubois et al. [DCYAL11] utilisèrent ce travail en employant une méthode d'approche macroscopique en ne résolvant que la force de contact, ceci pour des applications sur le problème de bruit à l'interaction pneu-route. En revanche, cette méthode ne fonctionne pas pour des rapports importants entre les modules viscoélastiques instantané et infini.

Une autre méthode, notamment employée dans le cadre du contact gomme-sol, est celle de Persson [Per01]. Cette méthode calcule l'énergie dissipée dans le solide à partir de la déformation normale engendrée par la rugosité du sol. La fréquence d'excitation du matériau provient du glissement de la gomme sur les aspérités du sol, voir chap 5. Récemment, Carbone et al. [CP13] présentèrent une nouvelle méthode de calcul de contact viscoélastique par élément de frontière. Ils utilisent une approche par la fonction de Green étendue aux matériaux viscoélastiques.

La modélisation de la viscoélasticité passe par l'emploi de modèles matériau. Les plus connus et employés sont les modèles rhéologiques élémentaires tels que les modèles de Maxwell, de Kelvin-Voigt ou de Zener, voir figure 2.2. Ils sont composés d'une combinaison de ressort(s) linéaire(s) de raideur E et d'un amortisseur de Newton de viscosité η .

La complexité du comportement des matériaux réels oblige à complexifier ces modèles en les sommant en parallèle ou en série : ce sont les modèles composés. Mandel [Man66] a montré d'un point de vue thermodynamique que n'importe quel matériau viscoélastique linéaire peut être représenté par une succession d'un ensemble infini de modèles de Maxwell en parallèle comme présenté dans la figure C.1. Il est possible de faire de même pour les modèles de Kelvin-Voigt et de Zener.

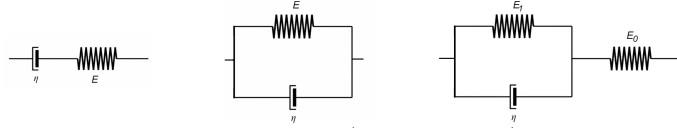


FIGURE 2.2: Modèles rhéologiques : a) Maxwell, b) Kelvin-Voigt, c) Zener

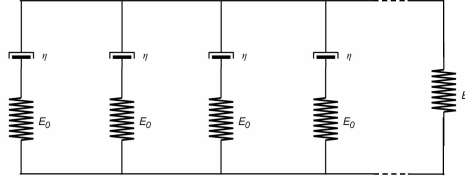


FIGURE 2.3: Modèle de Maxwell généralisé

Un autre modèle rhéologique est le spring-pot [Koe84] qui est un modèle rhéologique complexe permettant d'avoir un comportement variant entre un ressort et un amortisseur. Il fait appel à une dérivation fractionnaire. En remplaçant l'amortisseur des modèles rhéologiques simples par le spring-pot, on obtient les modèles rhéologiques fractionnaires comme le Maxwell fractionnaire ou le Zener fractionnaire.

Ces modèles ne sont valides que dans le cas de petites déformations, où le matériau présente un comportement linéaire vis-à-vis de la déformation. Dans le cas du contact pain de gomme-route, la prise en compte des grandes déformations [KLR06] et de la non-linéarité du matériau devrait être faite pour se rapprocher au mieux du comportement réel. Cette étude va néanmoins rester dans le cadre linéaire, ce qui permettra de capter la majorité du phénomène réel.

2.3 Modèle viscoélastique de Zener

Le matériau est représenté par un modèle de Zener généralisé, le schéma de principe est exposé dans la figure C.2.

Le comportement de ce modèle est découplé en 2 parties. La première est purement élastique, représentée par le ressort E_0 , appelé module instantané. Le matériau aura donc une raideur qui répondra instantanément à une variation de contrainte. La seconde partie est une partie viscoélastique composée du système ressort E_1 amortisseur η en parallèle. Cette partie-là répondra par une elongation avec un déphasage.

La relation entre la contrainte et l'elongation du modèle de Zener simple est représentée dans la figure 2.2 c).

Le modèle monobranche est défini par l'équation [Skr93], dont la notation est reprise de la figure 2.2 :

$$u + \frac{\eta}{E_1} \frac{du}{dt} = F \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_1 E_0} \frac{dF}{dt} \quad (2.1)$$

où u est la déformation et F la force exercée aux extrémités du modèle.

L'équation est mise sous une autre forme afin de la faire correspondre avec le modèle de Maxwell d'où les données matériau seront tirées.

Les paramètres τ , f et K vont ainsi être introduits tels que :

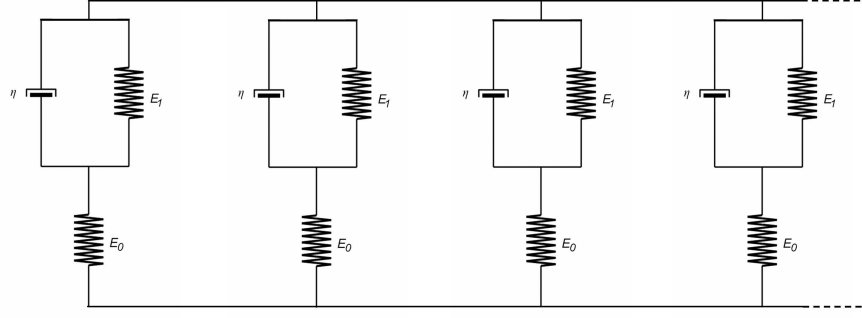


FIGURE 2.4: *Modèle de Zener généralisé*

- $\tau = \frac{\eta}{E_1 + E_0}$, τ est le temps de relaxation de chaque branche ;
- $1/K = \frac{E_1 + E_0}{E_1 E_0}$, K est la raideur au temps infini de chaque branche ;
- $f = E_0/E_1$, $f + 1$ est le rapport entre le module viscoélastique instantané et au temps infini.

On obtient ainsi :

$$u + \tau(f + 1) \frac{du}{dt} = \frac{F}{K} + \frac{\tau}{K} \frac{dF}{dt} \quad (2.2)$$

La force F est remplacée à partir de la relation force-déplacement : $F = Ku_e$ et $dF/dt = K du_e/dt$, suivant l'étude d'Ehret [Ehr]. On obtient ainsi la relation suivante :

$$u + \tau(f + 1) \frac{du}{dt} = u_e + \tau \frac{du_e}{dt} \quad (2.3)$$

Afin d'obtenir le modèle de Zener généralisé multibranche, il convient de discrétiser chaque modèle monobranche à partir de : $u_e = K/K_i u_{e_i}$ et $du_e/dt = K/K_i du_{e_i}/dt$. On obtient alors :

$$u + \tau_i(f + 1) \frac{du}{dt} = \frac{K}{K_i} u_{e_i} + \tau_i \frac{K}{K_i} \frac{du_{e_i}}{dt} \quad (2.4)$$

où τ_i , K_i et u_{e_i} sont respectivement le temps de relaxation, la raideur au temps infini et la déformation élastique de chaque branche i . K est la somme des K_i .

Afin de permettre une correspondance avec le modèle de Maxwell, f est posé comme constant quelle que soit la branche du modèle de Zener. Une factorisation donne :

$$\frac{K_i}{K} \left[u + \tau_i(f + 1) \frac{du}{dt} \right] = u_{e_i} + \tau_i \frac{du_{e_i}}{dt} \quad (2.5)$$

L'équation décrivant une force, le modèle multibranches est donc équivalent à la somme de chaque système monobranche :

$$\sum_i \frac{K_i}{K} \left[u + \tau_i(f + 1) \frac{du}{dt} \right] = \sum_i u_{e_i} + \sum_i \tau_i \frac{du_{e_i}}{dt} \quad (2.6)$$

Ce modèle ne tient pas compte de la variation des propriétés du matériau due à la température. L'étude se focalisant sur le contact lubrifié où l'eau refroidira le contact et maintiendra une température quasi constante, cette simplification n'impliquera pas beaucoup de différence.

2.4 Modélisation du problème de contact sec élastique

La viscoélasticité étant calculée à partir d'une déformation élastique, il faut d'abord définir l'élasticité ainsi que la résolution du problème de contact.

La distribution des pressions de contact dans des conditions de contact sec a été étudiée par Hertz [Her81]. Dans les cas de lubrification extrêmes, où les films sont très fins et les pressions très élevées, le contact de Hertz devient la solution asymptotique du problème EHL. Le choix de ce type de modélisation est donc très pertinent pour cette étude.

Hertz s'est basé sur l'étude faite par Boussinesq [Bou85] qui a formulé plusieurs hypothèses :

- les solides sont des massifs semi-infinis, c-à-d que la zone de contact est faible par rapport à la taille des solides ;
- les solides sont élastiques, homogènes et isotropes ;
- les contraintes sont normales à la surface de contact.

Le contact modélisé dans cette étude sera un contact de Hertz avec 2 sphères en contact. Les hypothèses d'un contact de Hertz sont :

- une déformation faible des pièces en contact ;
- pas d'effet de conditions aux limites ; on se place dans un contact de type massif semi-infini.

Le problème de contact sec se résume à deux solides à la géométrie connue, pressés ensemble par une force w où la pression de contact p va déformer les deux solides. Enfin, le problème va devoir satisfaire l'équation d'équilibre entre la charge appliquée et la pression générée dans le contact.

La géométrie utilisée pour les solides est une sphère avec un rayon de courbure identique suivant les 2 axes du plan x et y : $R_y = R_x$, voir figure 2.5.

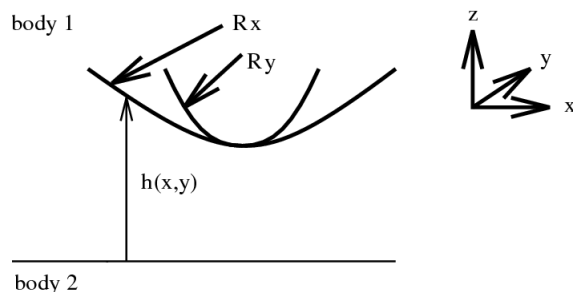


FIGURE 2.5: Géométrie et système de coordonnées du contact

La séparation des deux surfaces h s'exprime alors ainsi :

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + u_e \quad (2.7)$$

où h_0 est la séparation de solide rigide et u_e la déformation élastique calculée par la solution de Boussinesq :

$$u_e = \frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (2.8)$$

Le problème est non-linéaire et le contact sans adhésion, ce qui implique une pression positive dans

la zone de contact et une pression nulle dans la zone de non-contact :

$$\begin{aligned} h(x, y) > 0, \quad p(x, y) &= 0 && \text{non contact} \\ h(x, y) &= 0, \quad p(x, y) > 0 && \text{contact} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La charge w doit être équilibrée avec l'intégrale des pressions dans le contact par l'équation d'équilibre de la charge :

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy \quad (2.10)$$

Ce problème de contact a été résolu par Hertz. La solution donne une aire de contact d'un disque de rayon a où $h(x, y) = 0$ pour $(x/a)^2 + (y/a)^2 \leq 1$. La distribution de pression est semi-elliptique :

$$p(x, y) = \begin{cases} p_h \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/a)^2}, & \text{si } (x/a)^2 + (y/a)^2 \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

L'enfoncement est $h_0 = -a^2/R_x$, où la pression de Hertz p_h et le rayon de contact a sont donnés par :

$$p_h = \frac{3w}{2\pi a^2} \quad (2.12)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3wR_x}{2E'}} \quad (2.13)$$

avec le module élastique équivalent E' , donné par $2/E' = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$.

La solution est donc connue analytiquement. Toutefois, l'introduction de variables dépendantes du temps, comme la viscoélasticité, ou de l'espace, comme la rugosité, nécessitent de résoudre le problème numériquement.

Les équations vont être représentées à partir de variables adimensionnées. D'abord, cela va permettre de maintenir les variables sur des valeurs proches de 1, ce qui est crucial pour la précision du calcul. Ensuite, l'adimensionnement va autoriser l'utilisation des groupes similaires, où une solution adimensionnée peut donner plusieurs résultats dimensionnés.

Les conditions de contacts étant proches de la solution de Hertz, les variables vont être adimensionnées à partir des paramètres du contact hertzien :

$$\begin{aligned} X &= x/a \\ Y &= y/a \\ P &= p/p_h \\ H &= hR_x/a^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le problème est réécrit :

$$\begin{aligned} H(X, Y) > 0, \quad P(X, Y) &= 0 && \text{non contact} \\ H(X, Y) &= 0, \quad P(X, Y) > 0 && \text{contact} \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec

$$H(X, Y) = H_0 + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + U_e \quad (2.16)$$

où

$$U_e = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(X', Y') dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \quad (2.17)$$

L'équation d'équilibre de la charge s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X, Y) dX dY = 2\pi/3 \quad (2.18)$$

Et la solution de Hertz devient :

$$P(X, Y) = \begin{cases} \sqrt{1 - X^2 - Y^2}, & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Et $H_0 = -1$.

La solution du champ de pression P , de la séparation des surfaces H est visible dans la figure 2.6.

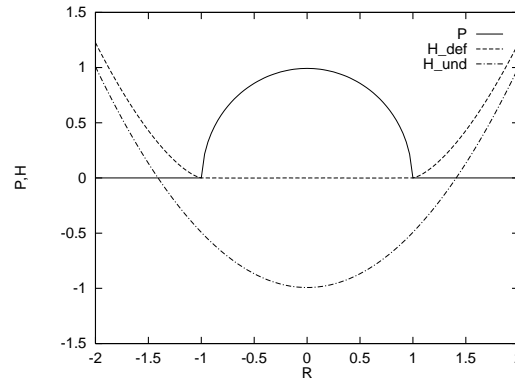


FIGURE 2.6: *Pression de contact de Hertz adimensionnée, géométrie déformée et non déformée pour $H_0 = -1$.*

2.5 Contact viscoélastique transitoire par MultiGrille

Cette méthode de calcul permet de modéliser le problème de contact et la viscoélasticité en régime transitoire. Cette technique nécessitant un nombre important de pas de temps de calcul afin d'obtenir une réponse en régime stabilisé, la technique de MultiGrille [Bra77] est utilisée pour accélérer la convergence. L'intérêt de travailler en transitoire est de capter toute la plage de réponse du matériau viscoélastique.

2.5.1 Modèle viscoélastique en sollicitation temporelle

Pour implémenter l'équation de Zener, une discrétisation du temps par une dérivée de 1^{er} ordre en arrière a été choisie. Appliquée sur l'équation 2.5 on obtient :

$$\frac{K_i}{K} \left[u(t) + \frac{\tau_i (f + 1)}{\Delta t} (u(t) - u(t - \Delta t)) \right] = u_{e_i}(t) + \frac{\tau_i}{\Delta t} (u_{e_i}(t) - u_{e_i}(t - \Delta t)) \quad (2.20)$$

où Δt est le pas de temps.

En séparant les déformations aux temps actuel et précédent et en divisant par $1 + \tau_i/\Delta t$, on obtient :

$$\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t) = u_{e_i}(t) - \left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u_{e_i}(t - \Delta t) + \frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t - \Delta t) \quad (2.21)$$

Le matériau sous sa forme généralisée étant composé de modèles de Zener simples en parallèle, la raideur globale du système est la somme de tous les termes :

$$\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t) \right] = \sum_i \left[u_{e_i}(t) - \left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u_{e_i}(t - \Delta t) + \frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t - \Delta t) \right] \quad (2.22)$$

L'équation pour trouver la déformation viscoélastique s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{u_e(t)}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] \right]} - \frac{\sum_i \left[\left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u_{e_i}(t - \Delta t) \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] \right]} + \frac{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] \right]} u(t - \Delta t) \quad (2.23)$$

où $u_e(t)$ est la déformation élastique vue dans l'équation 2.8 et :

$$u_{e_i}(t) = \frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t) + \left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u_{e_i}(t - \Delta t) - \frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] u(t - \Delta t) \quad (2.24)$$

$u_{e_i}(t)$ est calculé pour chaque branche i à la fin de chaque pas de temps et deviendra $u_{e_i}(t - \Delta t)$.

Avec l'introduction de la viscoélasticité, le module équivalent E' de l'équation u_e variant dans le temps, il devient nécessaire de le remplacer par un module fixe. Il est possible d'utiliser le module instantané du matériau G_0 ou le module infini $G_\infty = K = \sum_i K_i$; c'est ce dernier qui va être employé.

$$u_e = \frac{2}{\pi K'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (2.25)$$

Le module équivalent K' est défini tel que :

$$\frac{2}{K'} = \frac{1 - \nu_1^2}{K^1} + \frac{1 - \nu_2^2}{K^2} \quad (2.26)$$

où K^i est le module équivalent du solide i .

Ainsi, le rayon de contact a nécessaire à l'adimensionnement est :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3wR_x}{2K'}} \quad (2.27)$$

Les équations adimensionnées restent ainsi inchangées.

2.5.2 Résolution du contact transitoire par technique MultiGrille

Dans cette sous-partie, l'application de la méthode MultiGrille [VL00b] au problème de contact sec viscoélastique est traitée.

Sur chaque grille, l'équation de complémentarité est vérifiée :

$$\begin{aligned} H_{i,j}^h > 0, \quad P_{i,j}^h &= 0 && \text{non contact} \\ H_{i,j}^h = 0, \quad P_{i,j}^h &> 0 && \text{contact} \end{aligned} \quad (2.28)$$

où la séparation des surfaces $H_{i,j}^h$ est définie par :

$$H_{i,j}^h = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + U_v^h = H f_{i,j}^h \quad (2.29)$$

et U_v^h est la déformation viscoélastique de l'équation 3.13. La déformation élastique est calculée de façon discrète [VL00b] par :

$$U_e^h = \sum_{i'} \sum_{j'} \kappa_{i,i',j,j'}^{hh} P_{i',j'}^h \quad (2.30)$$

$\kappa_{i,i',j,j'}^{hh}$ sont les noyaux et représentent l'influence d'un point sur tous les autres points de la grille.

Pour accélérer le calcul de la double somme, la méthode MLMI (MultiLevel-MultiIntregation) est employée [VL00a].

La méthode pour corriger la pression est une relaxation de type Jacobi [VL00b], appliquée de manière distributive. En chaque point i, j traité, les 4 points voisins vont recevoir 1/4 de l'opposé de la correction centrale $\delta_{i,j}^h$:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^h + \delta_{i,j}^h \\ P_{i+1,j}^h - \delta_{i,j}^h/4 \\ P_{i-1,j}^h - \delta_{i,j}^h/4 \\ P_{i,j+1}^h - \delta_{i,j}^h/4 \\ P_{i,j-1}^h - \delta_{i,j}^h/4 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalement, un point i, j recevra :

$$\bar{P}_{i,j}^h = \tilde{P}_{i,j}^h + \delta_{i,j}^h - \frac{1}{4}(\delta_{i-1,j}^h + \delta_{i+1,j}^h + \delta_{i,j-1}^h + \delta_{i,j+1}^h) \quad (2.32)$$

Cette technique a pour but de limiter la perturbation sur les points éloignés du point i, j ayant été corrigé. Plus la discrétisation est fine, plus la perturbation affectera un nombre important de points ; il est donc nécessaire d'employer cette technique lorsque le nombre de points devient grand (généralement à partir de 1024^2 points pour une dimension de grille 3×3).

Le coefficient correcteur de la pression est calculé à partir d'une formule exprimant la variation de la hauteur engendrée par une variation de pression :

$$\delta_{i,j}^h = r_{i,j}^h \left(\frac{\partial H_{i,j}^h}{\partial P_{i,j}^h} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{i,j}^h}{\partial P_{i-1,j}^h} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{i,j}^h}{\partial P_{i+1,j}^h} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{i,j}^h}{\partial P_{i,j+1}^h} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{i,j}^h}{\partial P_{i,j-1}^h} \right)^{-1} \quad (2.33)$$

et en utilisant l'Equation 3.12 on trouve :

$$\delta_{i,j}^h = \frac{r_{i,j}^h}{\left(\kappa_{0,0}^{hh} - \kappa_{0,1}^{hh}/2 - \kappa_{1,0}^{hh}/2 \right) \sum_i \left[K_i/K \left[1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t} / 1 + \frac{\tau_i}{\Delta t} \right] \right]} \quad (2.34)$$

où le résidu $r_{i,j}^h$ de l'équation est :

$$r_{i,j}^h = {}_H f_{i,j}^h - H_0 - \frac{X_i^2}{2} - \frac{Y_j^2}{2} - U_v^h \quad (2.35)$$

avec ${}_H f_{i,j}^h$, le second membre de l'équation de séparation des surfaces 3.12.

Le calcul étant non-linéaire à cause du contact, afin d'améliorer la robustesse du calcul, un coefficient "sous-relaxant" ω_{jac} multiplie le coefficient correcteur $\delta_{i,j}^h$. Il est généralement choisi entre 0.3 et 0.6. Il permet de diminuer l'intensité de la correction et ainsi, de rendre le calcul moins sujet aux divergences.

La correction MultiGrille utilise le principe de Full Approximation Scheme [VL00b] et emploie un schéma de type V-cycle, voir figure 2.7. Le calcul démarre sur la grille la plus fine, soit le niveau 4 ; ν_1 cycles de relaxations sont effectués. Les fonctions *coarsen* transfèrent les informations sur la grille inférieure, soit le level 3 et effectuent le même nombre de cycles de relaxation. Et ainsi de suite jusqu'à atteindre la grille la plus grosse où ν_0 relaxations sont effectuées. Enfin, le schéma de remontée suit le même principe avec une fonction *refine* pour le transfert d'informations et ν_2 cycles de relaxation.

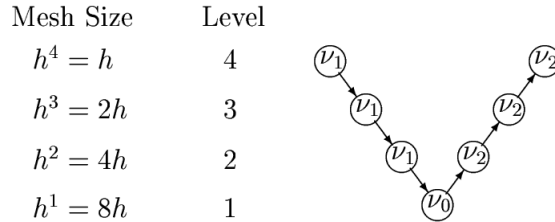


FIGURE 2.7: Diagramme de flux d'un V-cycle pour un cas à 4 grilles [VL00b].

Le problème doit être représenté sur les grilles inférieures H par l'équation :

$$\tilde{H}_0 + \frac{X_I^2}{2} + \frac{Y_J^2}{2} + U_v^H {}_H \hat{f}_{I,J}^H \quad (2.36)$$

où le second membre de l'équation de la séparation des surfaces ${}_H \hat{f}^H$ est défini par :

$${}_H \hat{f}_{I,J}^H = [I_h^H r_{\cdot,\cdot}^h]_{I,J} + \tilde{H}_0 + \frac{X_I^2}{2} + \frac{Y_J^2}{2} + U_v^h \quad (2.37)$$

et U_v^h reprend l'équation 3.13 où

$$U_e^h = \sum_{J'} \kappa_{I,I',J,J'}^{HH} [I_h^H \tilde{P}_{\cdot,\cdot}^h]_{I',J'} \quad (2.38)$$

avec I, J sont les indices de la grille grosse H .

Les fonctions *coarsen* permettent de transférer la séparation des surfaces $H_{i,j}^h$ ainsi que la pression $P_{i,j}^h$ des grilles fines h vers les grilles grosses H . Dans le contact sec, la restriction de type injection

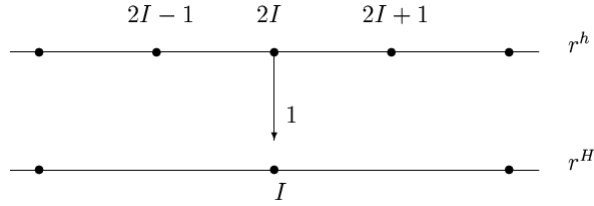


FIGURE 2.8: Schéma de principe de la restriction par injection.

est employée afin de conserver la même aire de contact ; le schéma de principe est montré dans la figure 2.8.

Pour la pression, on trouve ainsi :

$$P_{I,J}^H = P_{2I,2J}^h \quad (2.39)$$

Pour la séparation des surfaces, une correction est en plus appliquée :

$${}_H\hat{f}_{I,J}^H = {}_H\hat{f}_{2I,2J}^H + U_{v\,2I,2J}^h - U_{v\,I,J}^H \quad (2.40)$$

L'équation d'équilibre de la charge n'est résolue que sur la grille la plus grosse :

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 - \omega_2 {}_W r^h \quad (2.41)$$

où le résidu vaut :

$${}_W r^h = {}_W f^h - h_x h_y \sum_i \sum_j \tilde{P}_{i,j}^h \quad (2.42)$$

et où ${}_W f^h$ vaut $2\pi/3$ sur la grille fine et :

$${}_W f^H = H_x H_y \sum_I \sum_J \tilde{P}_{I,J}^H + {}_W r^h = H_x H_y \sum_I \sum_J \tilde{P}_{I,J}^H + {}_W f^h - h_x h_y \sum_i \sum_j \tilde{P}_{i,j}^h \quad (2.43)$$

sur les autres grilles.

Ensuite, la fonction *refine* assure la correction de la pression des grilles fines h depuis les grilles grosses H avec l'opérateur d'interpolation I_H^h dont l'exemple en 1D est montré dans la figure 2.9.

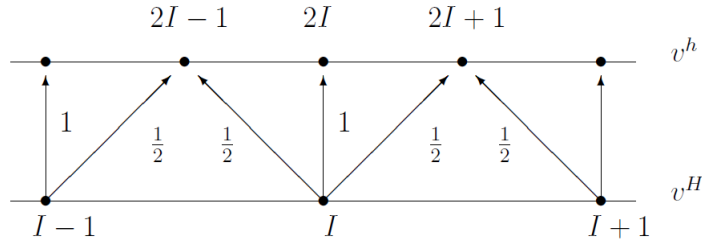


FIGURE 2.9: Exemple d'interpolation dans le cas 1D.

Dans le cas 2D, les points impairs de la grille fine recevront $1/4$ de la valeur de leurs points avoisinants de la grille grosse.

La correction de la pression lors du *refine* est :

$$\bar{P}^h = \tilde{P}^h + I_H^h(\tilde{P}^H - I_h^H \tilde{P}^h) \quad (2.44)$$

L'application de la viscoélasticité a nécessité la modification de certaines équations par rapport au cas élastique, notamment pour l'équation 2.34. Il a été vérifié que la convergence était conservée.

2.5.3 Résultats

Un contact entre une sphère rigide et un massif semi-infini viscoélastique est étudié. Cette étude a pour but de montrer l'évolution des caractéristiques du contact au cours du temps. Le cas de chargement est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad W = 0, \quad v = 0 \\ 0 < t \leq 3, & \quad W = 2\pi/3, \quad v = 0 \\ t > 3, & \quad W = 2\pi/3, \quad v = 1 \end{aligned}$$

La première partie du chargement consiste en l'application d'une charge instantanée W et sans glissement de la géométrie. La seconde partie conserve la même charge mais impose une vitesse de glissement $v = 1$ à la géométrie.

Le modèle viscoélastique est constitué de 10 branches et ses caractéristiques sont décrites dans la table 2.1.

$E_0 = 20 \text{ (MPa)}$	$f = 19$	$\tau_i \text{ (s)}$	K_i
$E_\infty = 1 \text{ (MPa)}$	$\nu = 0.5$	1.10^{-5}	0.1
		1.10^{-4}	0.18
		5.10^{-4}	0.1
		1.10^{-3}	0.1
		5.10^{-3}	0.1
		1.10^{-2}	0.05
		5.10^{-2}	0.09
		1.10^{-1}	0.2
		5.10^{-1}	0.07
		1.0	0.01

TABLE 2.1: *Caractéristiques du matériau utilisé.*

Le domaine modélisé est de 12×3 avec 1024×512 points. Le temps du calcul est de 4 heures pour 1000 pas de temps de $0.012s$.

Dans la figure 2.10, on observe la variation du champ de pression P suivant la ligne centrale X en fonction du temps t . La première partie du chargement met en valeur la variation du module élastique du matériau en fonction du temps. Le module viscoélastique décroissant avec le temps, le champ de pression s'aplanit et le rayon de contact augmente. La seconde partie montre un champ de pression asymétrique dû à la différence de module viscoélastique entre l'entrée du contact (grands X) et la sortie (petits X). Dans cette seconde zone, on remarque un comportement transitoire tant que le contact n'est pas assez éloigné de la zone du chargement statique.

Pour le même cas, la figure 2.11 montre le coefficient de frottement μ (son calcul est présenté dans le chapitre 5), la déformation maximale U_v et le rayon de contact a au cours du temps t . Les trois paramètres sont composés d'une partie transitoire suivie d'une stabilisation indiquant que le régime permanent est atteint. Dans la partie transitoire, le coefficient de frottement présente un maximum supérieur à la valeur du régime permanent. Cela est dû à l'indentation créée par la première partie du changement où le matériau s'est très fortement relaxé. Cette zone est visible par le maximum de la déformation viscoélastique et du rayon de contact. L'effort demandé pour sortir de l'enfoncement est supérieur à celui nécessaire pour enfoncer un matériau non-relaxé.

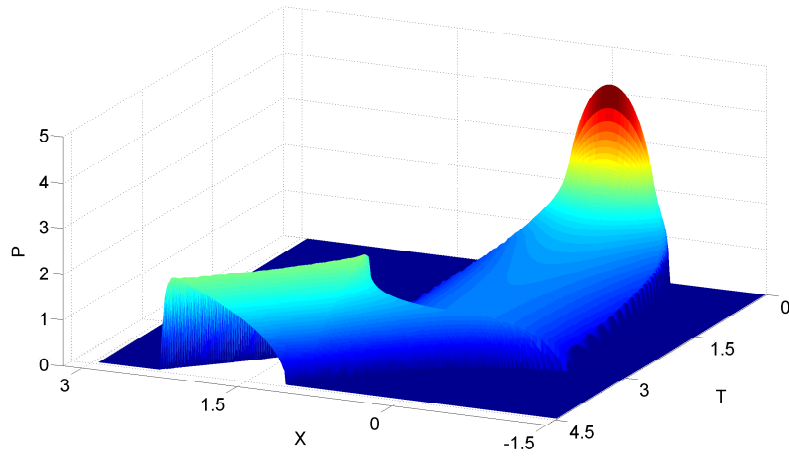


FIGURE 2.10: Champ de pression P suivant la ligne $Y = 0$ en fonction du temps T

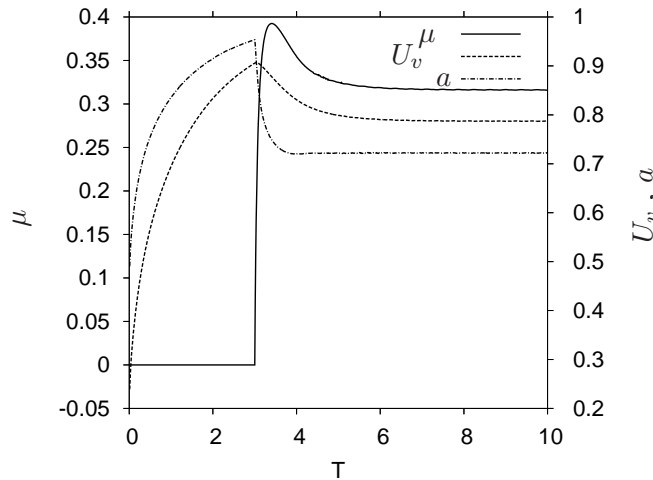


FIGURE 2.11: Coeff. de frottement μ , déformation maximale U_v et rayon de contact a en fonction du temps T

2.6 Contact viscoélastique en régime permanent par FFT

Cette partie présente la modélisation du contact viscoélastique à l'aide d'une méthode calculant la déformation viscoélastique par FFT.

2.6.1 Modèle viscoélastique en régime permanent

Cette méthode de calcul permettant d'obtenir la réponse en régime permanent du matériau viscoélastique présente deux avantages :

- obtention de la réponse en un pas de temps ;
- calcul d'une réponse sans effet transitoire contribuant à une convergence plus facile.

Pour représenter le comportement de la viscoélasticité en régime permanent, une solution consiste à la décrire en fonction de la fréquence pour une vitesse constante. Ainsi, à partir de l'équation 2.3, on opère un changement de variable sur le temps t : $t = x/v$ avec v la vitesse considérée comme constante et x le déplacement. On obtient ainsi :

$$u + \tau (f + 1) \frac{du}{dx} v = u_e + \tau \frac{du_e}{dx} v \quad (2.45)$$

On applique la transformée de Fourier sur cette équation, rendant le problème périodique :

$$\bar{u} + i \omega_x v \tau (f + 1) \bar{u} = \bar{u}_e + i \omega_x v \tau \bar{u}_e \quad (2.46)$$

où $\bar{u} = \mathcal{F}(u)$, $\bar{u}_e = \mathcal{F}(u_e)$, $\mathcal{F}(dz/dx) = i\omega_x \bar{z}$, i est le nombre complexe tel que $\sqrt{i} = -1$ et ω_x la fréquence spatiale.

Une factorisation donne :

$$\bar{u} [1 + i\omega_x v \tau (f + 1)] = \bar{u}_e [1 + i\omega_x v \tau] \quad (2.47)$$

L'équation peut se mettre sous la forme :

$$\bar{U}_v = B \cdot \bar{U}_e \quad (2.48)$$

avec $U_v = u$, $U_e = u_e$ et

$$B = \frac{[1 + i\omega_x v \tau]}{[1 + i\omega_x v \tau (f + 1)]} \quad (2.49)$$

On remarque que l'équation 2.48 rejoint le principe de correspondance de Lee-Mandell [Man55, LR55] où la viscoélasticité se représente comme l'élasticité si elle est fonction de la fréquence.

Ensuite, la déformation viscoélastique est obtenue en effectuant une transformée de Fourier inverse.

Pour appliquer ce problème au cas multibranche, B étant l'inverse de la raideur, il faut appliquer la somme directement :

$$B = \sum_i K_i \frac{[1 + i\omega_x v \tau]}{[1 + i\omega_x v \tau (f + 1)]} \quad (2.50)$$

U_e est calculée à partir des noyaux κ comme dans le cas MultiGrille :

$$U_e = \kappa * P \quad (2.51)$$

Le produit de convolution est équivalent à un produit simple lorsque la transformée de Fourier est appliquée, cette méthode est logiquement choisie :

$$\bar{U}_e = \bar{\kappa} \cdot \bar{P} \quad (2.52)$$

La méthode *zero-padding* est utilisée lors de ce produit de convolution, le domaine fréquentiel est ainsi doublé dans chaque direction. Une fois le calcul effectué, la déformation obtenue est exacte dans le domaine initial.

2.6.2 Résolution du contact en régime permanent par FFT

Le modèle décrit précédemment représente le glissement de la géométrie à une vitesse constante v sur un massif semi-infini viscoélastique.

Comme pour le problème transitoire de la section 2.5, la résolution en régime permanent doit répondre aux mêmes équations ainsi qu'au même adimensionnement. On a d'abord l'équation de complémentarité :

$$\begin{aligned} H_{i,j} > 0, \quad P_{i,j} &= 0 & \text{non contact} \\ H_{i,j} &= 0, \quad P_{i,j} > 0 & \text{contact} \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $H_{i,j}$ est défini par l'équation de la séparation des surfaces :

$$H_{i,j} = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + U_v \quad (2.54)$$

Enfin l'équation d'équilibre de la charge 2.18 est la même que pour le problème de contact transitoire.

La résolution de la pression s'effectue par une relaxation de type Jacobi simple et non distributive comme dans le cas transitoire. Le dénominateur de la correction $\delta_{i,j}$ n'utilise que la partie élastique de la correction, donnant à cette dernière une tendance "sous-relaxante" :

$$\delta_{i,j} = \omega_{jac} \cdot \frac{r_{i,j}}{(\kappa_{0,0} - \kappa_{0,1}/2 - \kappa_{1,0}/2)} \quad (2.55)$$

avec $r_{i,j}$ le résidu de l'équation de la séparation des surfaces :

$$r_{i,j} = H_{i,j} - H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + U_v \quad (2.56)$$

où $\kappa_{k,l}$ sont les coefficients d'influence et ω_{jac} le coefficient de "sous-relaxation".

2.6.3 Résultats

Cette sous-partie décrit la résolution du cas de contact sec viscoélastique par utilisation de la FFT.

Le calcul étant en régime permanent, le cas de chargement est défini par 2.57 et représente une sphère en glissement sur un massif semi-infini viscoélastique.

$$t > 0, \quad W = 2\pi/3, \quad v = 1 \quad (2.57)$$

Le matériau est identique à celui de la section précédente 2.5.3 page 24. Le domaine modélisé est de 5.5×5.5 avec 512^2 points. Le temps du calcul est de 20s. En comparaison avec un seul pas de temps de calcul du cas MultiGrille 2.5.3, le temps de calcul est légèrement plus élevé.

Le champ de pression (en gris transparent) ainsi que le champ de déformation (en couleur) présentent une asymétrie, comme on peut le voir dans la figure 2.12.

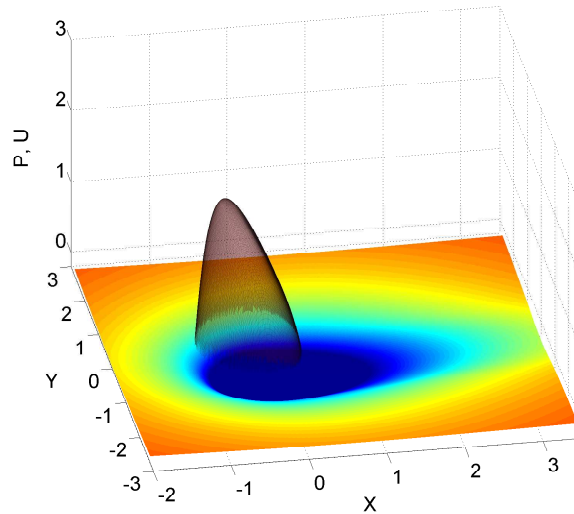


FIGURE 2.12: Champ de pression P ainsi que champ de déformation U_v

2.7 Comparaison avec le cas élastique

La comparaison entre un contact sec élastique et viscoélastique est analysée dans cette section.

2.7.1 Comparaison sans glissement

Le cas d'étude porte sur l'enfoncement de la sphère dans le massif élastique et viscoélastique, avec l'application de la charge W d'une manière instantanée, comme montré ci dessous :

$$\begin{aligned} t = 0, \quad W &= 0 \\ t > 0, \quad W &= 2\pi/3 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Le problème n'impliquant pas de glissement, seul le contact viscoélastique transitoire MultiGrille peut être utilisé.

Le matériau est identique au cas 2.5.3 page 24. Le domaine modélisé est de 3×3 avec 6 niveaux de grilles dont la plus fine contient 512^2 points et la plus grosse 16^2 . Le temps de calcul est de 9800s pour 1700 pas de temps de 0.00586s.

La figure 2.13 montre le champ de pression sur la ligne centrale suivant X en fonction du temps t . On remarque que le champ de pression du cas viscoélastique au temps initial $t = \Delta t$ est élevé et possède un rayon de contact faible par rapport au cas élastique. Les équations étant adimensionnées par rapport à la déformation au temps infini, le champ de pression viscoélastique tend vers le cas élastique pour les grandes valeurs de t . Il en est de même pour le rayon de contact (figure 2.14) et la déformation.

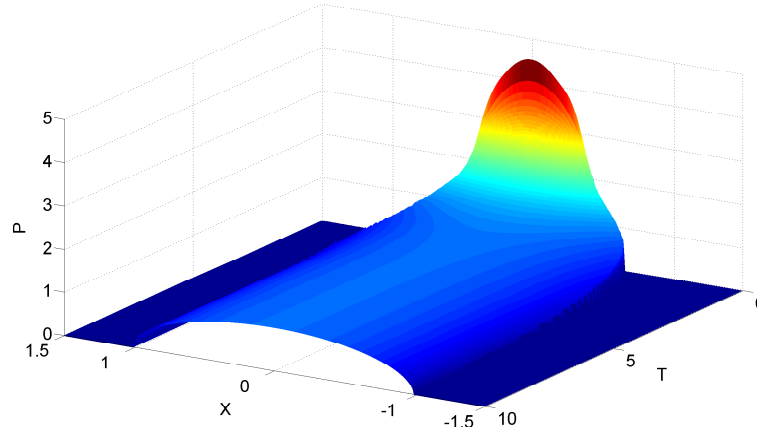


FIGURE 2.13: Champ de pression P suivant la ligne $Y = 0$ pour les cas élastique et viscoélastique

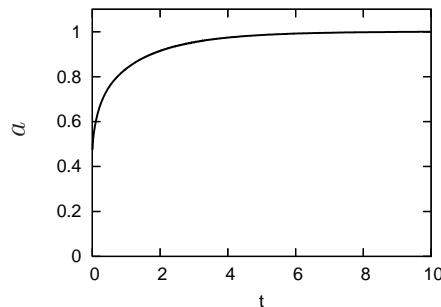


FIGURE 2.14: Rayon de contact a en fonction du temps t

2.7.2 Comparaison avec glissement

Le cas d'étude porte sur l'enfoncement de la sphère dans les massifs élastique et viscoélastique en ajoutant une vitesse de glissement entre la sphère et le massif. Le chargement de la sphère est :

$$\begin{aligned} t = 0, \quad W = 0, \quad v = 0 \\ t > 0, \quad W = 2\pi/3, \quad v = 1 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le matériau est identique au cas sans glissement. Pour les calculs MultiGrille, le domaine modélisé est de 12×3 avec 6 niveaux de grille dont la plus fine contient 1024×512 points et la plus grosse 32×16 . Le temps de calcul est de 13860s pour 1024 pas de temps de 0.012s.

Le calcul viscoélastique par FFT emploie un domaine de 5.5×5.5 pour 512^2 points. Le temps de calcul est de 4s.

Comme on peut le voir dans la figure 2.15, le champ de pression est asymétrique dans le cas viscoélastique et symétrique dans le cas élastique. Le champ de pression du cas viscoélastique a un gradient plus important côté X négatifs en raison du glissement de la géométrie vers la gauche ; le matériau rencontré étant plus rigide que celui en sortie de contact. L'adimensionnement étant posé par rapport à la déformation du matériau totalement relaxé, le contact viscoélastique présente un matériau en moyenne plus rigide que le cas élastique. Cela explique que le rayon de contact et la déformation sont plus faibles que dans le cas élastique, voir figure 2.11. Enfin, on remarque que le calcul MultiGrille transitoire a atteint correctement le régime permanent puisque le champ de pression est identique à celui du calcul en régime permanent par FFT.

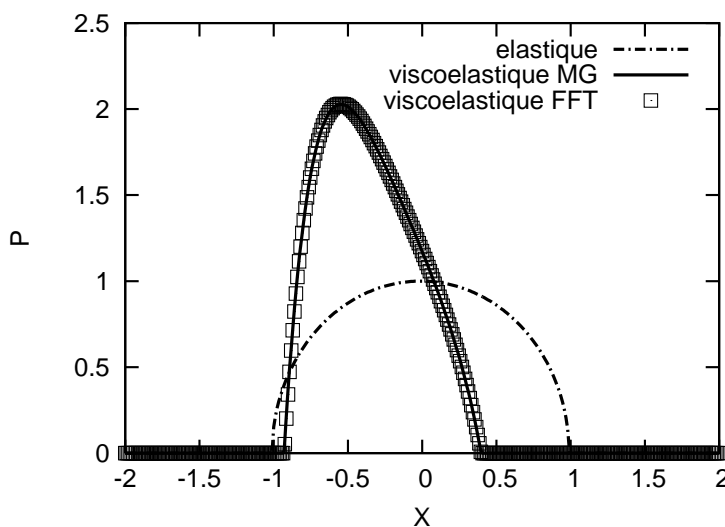


FIGURE 2.15: Champ de pression P suivant $Y = 0$ pour les cas élastique et viscoélastique

2.8 Conclusion

Le contact sec viscoélastique utilisant le modèle de Zener a été étudié. À partir de l'équation différentielle décrivant son comportement, deux équations ont été développées, une dans le cas transitoire et une autre dans le cas fréquentiel pour modéliser le régime permanent. Pour accélérer le calcul de chaque équation, une méthode de résolution efficace a été employée.

Dans le cas transitoire, la méthode MultiGrille associée à la méthode MLMI a été utilisée. Pour le cas fréquentiel, la résolution par FFT a été employée. Chacune de ces méthodes présente des

avantages et des inconvénients. La méthode transitoire par MultiGrille est très rapide pour résoudre un pas de temps et peut capturer les effets transitoires. En revanche, pour obtenir une solution en régime permanent, elle nécessite un nombre important de pas de temps ainsi qu'un grand domaine, ce qui n'est pas le cas du modèle en régime permanent. Enfin, les deux méthodes se montrent aussi robustes l'une que l'autre.

Ensuite, le cas élastique a été comparé au cas viscoélastique. Il a été montré que le matériau viscoélastique présente un comportement dépendant du temps, permettant de créer un frottement lorsqu'il y a une asymétrie du champ de pression.

Chapitre 3

Contact lubrifié mou et viscoélastique

3.1 Introduction

Le cas sec ayant été présenté, il faut maintenant introduire l'élément perturbateur du contact gomme-sol, c'est-à-dire l'eau.

Différentes façons d'incorporer l'eau existent, elles seront abordées dans la section 3.2. Plusieurs expériences menées au sein du département de *R&D* chez Michelin ont amené à penser que l'eau apporte un effet de lubrification au pneu et ceci même à basse vitesse, là où il n'y a pas de problèmes d'hydroplanage. L'eau va donc être introduite en tant que lubrifiant dans le contact gomme-sol.

Ce contact est très sévère et va donc mener à des épaisseurs de film très faibles et à des conditions de contact mixte. Cette étude ne va concerner que la partie où existe un film d'eau continu entre le pneu et la route. La prise en compte d'effet de démouillage ou de rupture du film de fluide comme en régime mixte ou limite ne sera pas étudiée ; le cas d'étude sera considéré comme le cas extrême de ce que peut rencontrer le pneumatique. L'étude porte donc sur la modélisation d'un contact VEHD représentant le contact gomme-sol.

Ce chapitre fait d'abord un rappel de différentes méthodes pour modéliser un contact lubrifié, notamment dans le cas de contacts élastiques mous et viscoélastiques. Dans un second temps, les équations et les hypothèses nécessaires à la lubrification sont présentées. Par la suite, l'application de la lubrification aux deux précédentes méthodes de calcul de contact viscoélastique est expliquée. Enfin, les résultats de ces deux méthodes et la comparaison face à des résultats de contact sec ou EHD sont montrés.

3.2 Bibliographie

Le contact lubrifié a été largement étudié dans la littérature. Reynolds [Rey86] établit d'abord les équations permettant la modélisation de la lubrification à partir des équations de Navier-Stokes. A partir de ces travaux, vont suivre de nombreuses avancées allant jusqu'aux modélisations complexes actuelles.

En 1916, Martin [Mar16] utilisa l'équation de Reynolds en régime isovisqueux rigide pour calculer l'épaisseur de film entre les dentures des engrenages. Plus tard, en 1938, Peppler [Pep38] prit en compte la déformation des surfaces avec l'hypothèse de fluide iso-visqueux. La piézoviscosité est introduite dans l'étude de la lubrification des dentures rigides proposée par Gatcombe [Gat45] en 1945.

Une grande étape est franchie par Ertel [Ert39] qui proposa la première étude EHD du contact

linéique. Le calcul de la géométrie déformée est basé sur la théorie de contact sec de Hertz. L'épaisseur de film est obtenue en ajoutant une constante au profil déformé. Suite à son analyse, Ertel proposa la première expression analytique pour calculer l'épaisseur de film. Petrusевич [Pet51] parvint à déterminer l'épaisseur de film et le diagramme de champ de pression de contact en résolvant simultanément l'équation de Reynolds et celle de la déformation élastique. Les résultats numériques obtenus confirment l'existence du pic de pression à la sortie de contact. Dans les années 1960, Dowson et Higginson [DH59] réalisèrent un grand nombre de simulations numériques pour calculer l'épaisseur de film dans un contact cylindre/plan ; puis Hamrock et Dowson [HD76] pour un contact sphère/plan. Les résultats obtenus permettent de déterminer l'influence des différents paramètres sur l'épaisseur de film. Ces paramètres sont groupés dans trois paramètres adimensionnés, et seront utilisés par la suite pour trouver une expression analytique de l'épaisseur minimale du film.

Même si les algorithmes employés par Dowson et Higginson et par Hamrock et Dowson présentent une avancée majeure dans la compréhension des phénomènes EHD, les pressions de contact restent relativement faibles (jusqu'à 0.5 GPa). Au delà, les algorithmes utilisés deviennent instables et inefficaces. Une autre méthode proposée par Evans et Snidle [ES91] permet d'obtenir des solutions pour des pressions plus élevées $O(1 \text{ GPa})$. Les solutions des équations de la lubrification EHD sont obtenues d'une manière itérative. Cette méthode associée aux fortes non-linéarités et au grand nombre de points nécessaire, rend le processus classique de résolution coûteux en temps CPU. Une nouvelle étape est franchie avec le développement de techniques multigrilles par Brandt [Bra77] et leur application à des problèmes EHD par Lubrecht [Lub87]. Afin d'accélérer le calcul de la déformation élastique, Brandt et Lubrecht [BL90, Bra90] développèrent un algorithme de MultiGrille MultiIntegration (MLMI). Par la suite, Venner [Ven91] optimisa la relaxation de l'équation de Reynolds et rendit ainsi l'algorithme MultiGrille beaucoup plus stable et efficace. La résolution d'un problème EHD pour des pressions élevées $O(3 \text{ GPa})$ devint possible même sur des ordinateurs personnels.

La majorité des études porte sur le cas piezovisqueux-élastique, parce que les systèmes sont généralement lubrifiés par de l'huile, composés de pièces métalliques et soumis à de fortes contraintes. Cependant les caractéristiques du contact gomme-sol routier ainsi que les propriétés de l'eau indiquent que le régime de lubrification est isovisqueux-viscoélastique. Hooke [HO72, HL96] a étudié les cas de contacts linéiques isovisqueux-élastiques mous lisses et rugueux. Il montra que le comportement du contact se rapproche fortement d'un contact sec et peut donc être approché par un calcul à partir d'un champ de pression hertzien. Il montra que les rugosités de courte longueur d'onde ne sont pas déformées, ce qui est en accord avec la théorie de réduction d'amplitude [LV99]. Dans le cadre isovisqueux-élastique, les applications généralement étudiées comme les joints [SS00b, Sal07, GP92] mais aussi les pneumatiques [PTAT05, Moo72], seront développées au chapitre 4.

Les modélisations de la lubrification employant un matériau viscoélastique sont principalement appliquées au cas du contact linéique. Leeuwen et Stakenborg [LS90] furent parmi les premiers à employer la viscoélasticité dans leur modélisation de joint d'étanchéité ; il en est de même pour Salant et al [SYT10, TS10]. Leur dernier modèle [TS12] permet de modéliser la viscoélasticité de l'échelle macroscopique du joint ainsi que l'échelle microscopique, composée des rugosités. Dans le modèle de joints de Schmidt et al [SAP10], l'introduction de la viscoélasticité a montré une variation de l'épaisseur du film de fluide au cours du temps. Elsharkawy [Els96] a étudié le contact linéique entre un cylindre métallique et un autre revêtu d'un matériau viscoélastique. Il a montré que le champ de pression devient asymétrique créant une résistance au roulement. Elsharkawy prouva ainsi que le phénomène principal de l'obtention d'un frottement sur la gomme peut encore avoir lieu lorsque les deux solides sont séparés par un film de fluide.

En 2D, Carbone et Persson [CP04] ont modélisé le démouillage d'une sphère en caoutchouc contre une plaque de verre. Goryacheva et Shpennev [GS12] ont modélisé un matériau viscoléastique indenté

par un poinçon rugueux.

Les figures 3.1 a) et b) montrent la surface de contact entre une bande de roulement et une surface lisse en verre recouverte d'eau [TR13]. Lorsque le pneumatique roule, de l'eau s'interpose entre le pain de gomme et la surface, diminuant la surface réelle de contact. Le cas sur une surface lisse comme le verre est prédisposé à la lubrification et aux effets d'inertie de l'eau conduisant à l'hydroplanage comme on peut le voir sur la surface d'entrée du pneu (côté droit). Dans la figure 3.1 b), le principe de la lubrification est légèrement visible sur la partie arrière du contact, alors qu'un cas sur une route n'est visible qu'à une échelle d'observation inférieure.

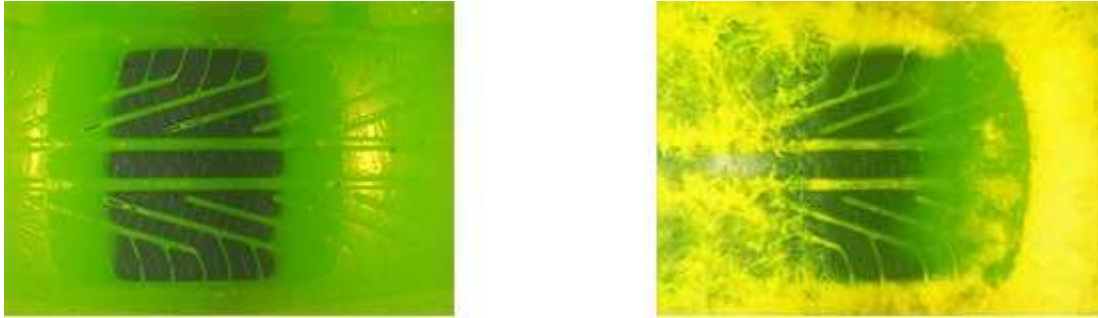


FIGURE 3.1: Zone de contact d'un pneumatique sur une glace en verre : a) statique, b) à 96 km/h. [TR13]

3.3 Lubrification élastohydrodynamique - équation de Reynolds

Cette partie présente l'effet de la lubrification modélisée par l'équation de Reynolds dans des cas de lubrification élastohydrodynamique.

L'équation fondamentale permettant de modéliser le fluide dans les cas de films minces a été développée par Reynolds [Rey86] à partir de l'équation de Navier-Stokes, en employant des simplifications et certaines hypothèses qui sont :

- un film de fluide mince : c-à-d que l'épaisseur de film h suivant z est très faible par rapport aux dimensions caractéristiques du contact ;
- un fluide continu et adhérent aux parois ;
- une pression constante dans l'épaisseur de film, c-à-d que p ne dépend pas de z ;
- des forces de volume et de surface négligées devant les forces visqueuses : l'écoulement est laminaire donnant ainsi un petit nombre de Reynolds Re .

L'équation de Reynolds décrit la conservation du débit massique d'un fluide visqueux entre deux surfaces parallèles. Elle relie la pression à la géométrie du contact et aux propriétés du lubrifiant. Son expression est visible dans l'équation 3.1 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial(u_m \rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

où p est la pression du fluide, h la hauteur du film de fluide et donc la séparation des surfaces, x et y les coordonnées du plan, ρ est la densité, η la viscosité et u_m la moyenne des vitesses des solides.

Les deux premiers termes de cette équation, appelés termes de Poiseuille, représentent le débit dû au gradient de pression. Le troisième terme, appelé terme de Couette ou *wedge*, provient de la vitesse moyenne des surfaces. Le dernier terme, appelé *squeeze*, décrit les effets de variation de la hauteur

de film en fonction du temps.

La relation liant la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement du fluide peut être linéaire, ainsi le fluide est qualifié de newtonien et modélisé par l'équation 3.2.

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.2)$$

où τ est la contrainte de cisaillement, η la viscosité, $\frac{\partial u}{\partial z}$ le gradient de vitesse perpendiculaire à la direction de cisaillement, qui sera z dans le cas de films minces.

Dans les cas contraires, le fluide est non-newtonien et nécessite des modèles plus complexes comme ceux de Rabinowitsch et d'Eyring.

La prise en compte de la variation de la viscosité du fluide η en fonction de la pression peut être effectuée par une loi de piezoviscosité. Les plus employées sont celles de Barus [Bar91] ou de Roelands [Roe66].

La densité ρ peut varier en fonction de la pression suivant des lois de compressibilité comme celles de Dowson et d'Higginson [DH66].

L'eau est soumise à des conditions relativement faciles dans le contact gomme-sol : elle opère à faible température et faible pression. Ainsi, les résultats de Rana et al [RM73] ont montré que sa viscosité et sa densité sont constantes pour ces conditions. Enfin, la viscosité sera modélisée par le modèle newtonien.

Comme beaucoup d'autres fluides, l'eau passe à l'état gazeux lorsque la pression devient faible et inférieure à sa pression de vapeur saturante. Ce phénomène s'appelle la cavitation et se produit généralement dans la zone arrière du contact. La pression de la vapeur d'eau étant relativement faible par rapport aux pressions dans le contact, la pression du fluide liquide sera fixée strictement supérieure à 0 et celle de la vapeur à 0. Le problème devient ainsi un problème complémentaire, avec un domaine fluide Ω_1 et un domaine en cavitation Ω_2 :

$$\begin{aligned} \Omega_1 \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial(u_m \rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad \& \quad p > 0 \\ \Omega_2 \quad & p = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comme il a été expliqué dans le chapitre précédent, les conditions de contact vont être très proches du contact sec hertzien, il est donc logique d'utiliser un adimensionnement des variables suivant les mêmes relations :

$$\begin{aligned} X &= x/a & Y &= y/a \\ P &= p/p_h & H &= hR_x/a^2 \\ \bar{\eta} &= \eta/\eta_0 & \bar{\rho} &= \rho/\rho_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où η_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité et la densité du fluide à l'état non cisailé et non contraint.

L'adimensionnement de l'équation 3.1 donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \quad (3.5)$$

où $\xi = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda}$ avec $\bar{\lambda} = \frac{12u_m\eta_0 R_x^2}{a^3 p_h}$.

Les conditions aux limites sont : $P(X_a, Y, T) = P(X_b, Y, T) = P(X, Y_a, T) = P(X, Y_b, T) = 0, \forall T$ où X_a, X_b, Y_a et Y_b dénotent les frontières du domaine.

Afin de caractériser les contacts EHL, différents couples de paramètres adimensionnés ont été créés et sont référencés dans [DH66]. Le couple choisi pour cette étude est celui de Moes en raison du nombre limité de paramètres facilitant les études paramétriques. Le cas du contact linéique a été proposé par Moes [Moe69] et le cas du contact ponctuel par Moes et Bosma [MB71] présenté par les deux paramètres ci-dessous :

M est le paramètre de charge :

$$M = \frac{w}{E' R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{E' R_x} \right)^{-3/4} \quad (3.6)$$

et L le paramètre matériau, seulement utilisable dans les cas piezovisqueux :

$$L = \alpha E' \left(\frac{\eta_0 u_s}{E' R_x} \right)^{1/4} \quad (3.7)$$

Ces paramètres décrivent le comportement et donc la solution du contact. Ils permettent de séparer différents types de régimes EHD :

régime	M	L
<i>rigide isovisqueux</i>	<i>faible</i>	0
<i>rigide piezovisqueux</i>	<i>faible</i>	<i>grand</i>
<i>élastique isovisqueux</i>	<i>grand</i>	0
<i>élastique piezovisqueux</i>	<i>grand</i>	<i>grand</i>

TABLE 3.1: *Régimes des solutions EHD [VL00b].*

Le cas du contact gomme-sol se situe dans le régime isovisqueux-viscoélastique, ainsi $\bar{\eta} = 1$, $\bar{\rho} = 1$ et $\alpha = 0$.

Les paramètres de Moes sont reliés à ceux utilisés dans l'équation de Reynolds grâce aux expressions :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \left(\frac{128\pi^3}{3M^4} \right)^{1/3} \\ \bar{\alpha} &= \frac{L}{\pi} \left(\frac{3M}{2} \right)^{1/3} \\ H^M &= H \sqrt{\frac{6\pi}{\bar{\lambda}}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec H^M la séparation des surfaces de Moes.

Les équations sont discrétisées comme dans le cas sec par différences finies sur un maillage régulier en deux dimensions dont les coordonnées sont x et y .

Le terme de Poiseuille est discrétisé suivant un schéma du second ordre [VL00b] :

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi_{i-1/2,j}^h P_{i-1,j}^h - (\xi_{i-1/2,j}^h + \xi_{i+1/2,j}^h) P_{i,j}^h + \xi_{i+1/2,j}^h P_{i+1,j}^h}{\Delta X^2} + \\
& \frac{\xi_{i,j-1/2}^h P_{i,j-1}^h - (\xi_{i,j-1/2}^h + \xi_{i,j+1/2}^h) P_{i,j}^h + \xi_{i,j+1/2}^h P_{i,j+1}^h}{\Delta X^2} - \\
& (\bar{\rho}H)_x^h + (\bar{\rho}H)_t^h = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

L'équation de Reynolds étant transitoire un schéma de type *NU2* [Ven91] est choisi pour les termes de Couette et de *squeeze* ; il permet de relier la discrétisation de l'espace et du temps :

- si $\Delta X^h \leq \Delta T$:

$$(\bar{\rho}H)_x^h + (\bar{\rho}H)_t^h = -(1/\Delta X - 1/\Delta T) (1.5\bar{\rho}H_{i,j} - 2\bar{\rho}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}H_{i-2,j}) - 1.5\bar{\rho}H_{i,j}/\Delta T \tag{3.10}$$

- si $\Delta X^h > \Delta T$:

$$(\bar{\rho}H)_x^h + (\bar{\rho}H)_t^h = -1.5\bar{\rho}H_{i,j}/\Delta X - (1/\Delta T - 1/\Delta X)1.5\bar{\rho}H_{i,j} \tag{3.11}$$

Dans le cas transitoire MultiGrille, le pas de temps ΔT étant choisi égal au pas d'espace ΔX^h sur la grille fine pour des raisons d'efficacité, le 1er cas sera valable uniquement sur la grille fine, l'autre cas sur toutes les autres grilles.

L'équation d'équilibre de la charge ainsi que l'équation de séparation des surfaces suivent exactement la même formule et la même discrétisation qu'en contact sec.

3.4 Lubrification viscoélastohydrodynamique transitoire par MultiGrille

Cette section présente l'application de la lubrification à un contact entre une pièce rigide et un corps viscoélastique en employant la méthode de MultiGrille dans le cas transitoire.

3.4.1 Résolution du contact VEHD

L'équation de séparation de surface 3.12 ainsi que la déformation viscoélastique par un modèle de Zener en régime transitoire 3.13 reprennent les mêmes équations que dans le cas sec viscoélastique transitoire.

$$H_{i,j}^h = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + U_v^h = H f_{i,j}^h \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
U_v^h(t) = & \frac{U_e^h(t)}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1+\tau_i(f+1)/\Delta t}{1+\tau_i/\Delta t} \right] \right]} - \frac{\sum_i \left[\left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1+\tau_i/\Delta t} \right] U_e^h(t - \Delta t) \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1+\tau_i(f+1)/\Delta t}{1+\tau_i/\Delta t} \right] \right]} + \frac{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1+\tau_i/\Delta t} \right] \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1+\tau_i(f+1)/\Delta t}{1+\tau_i/\Delta t} \right] \right]} u(t - \Delta t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$U_e^h = \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'}^{hh} P_{i',j'}^h \tag{3.14}$$

et

$$U_{e_i}^h(t) = \frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] U_v^h(t) + \left[\frac{\tau_i/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] U_{e_i}^h(t - \Delta t) - \frac{K_i}{K} \left[\frac{\tau_i(f+1)/\Delta t}{1 + \tau_i/\Delta t} \right] U_v^h(t - \Delta t) \quad (3.15)$$

La correction de l'équation s'effectue par une relaxation par ligne [VL00b]. Cette technique résout l'équation d'une manière directe sur chaque ligne ; elle présente l'avantage d'être très efficace dans la diminution de l'erreur même si elle est un peu plus coûteuse en temps CPU qu'une relaxation par point. Dans la zone fortement chargée où ξ/h_x^2 est petit, l'équation de Reynolds se transforme en équation de propagation suivant X , voir l'équation 3.16. Une relaxation simple par point déplacerait l'erreur et ne serait donc pas efficace.

$$\frac{\partial H}{\partial X} \approx 0 \quad (3.16)$$

Le principe de la relaxation par ligne est de résoudre de manière simultanée l'équation sur toute une ligne dans la direction X . Le changement $\delta_{i,j}^h$ à appliquer sur la pression $\tilde{P}_{i,j}^h$ pour chaque ligne j est décrit par :

$$A^j \underline{\delta}_j^h = r_j^h \quad (3.17)$$

où $\underline{\delta}_j^h$ est le vecteur des changements $\delta_{i,j}^h$ et \underline{r}_j^h le vecteur des résidus $r_{i,j}^h$.

Ensuite une différentiation est faite en chaque point dans la ligne selon que l'on se trouve dans la zone centrale fortement chargée (ξ/h_x^2 petit) ou dans les zones d'entrée et de sortie faiblement chargées (ξ/h_x^2 grand). Dans la seconde une relaxation de type Gauss-Seidel est employée ; A^j est décrit par :

$$A_{i,k}^j = \frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k,j}^h} \quad (3.18)$$

Alors que dans la zone chargée, une relaxation distributive de type Jacobi va être utilisée en raison de la prédominance du terme de déformation ; dans ce cas A^j vaut :

$$A_{i,k}^j = \frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k,j}^h} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k+1,j}^h} + \frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k-1,j}^h} + \frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k,j+1}^h} + \frac{\partial(L^h \underline{P}^h)_{i,j}}{\partial P_{k,j-1}^h} \right) \quad (3.19)$$

Le changement entre ces deux techniques s'effectue pour une valeur où $\xi/h_x^2 = 0.3$, valeur qui est déterminée par expérience.

L'expression discrétisée de $A_{i,k}^j$ est décrite dans [VL00b]. Par rapport au cas élastique détaillé, une modification de la correction de la pression est nécessaire pour la prise en compte de la viscoélasticité, il faut multiplier $A_{i,k}^j$ par :

$$\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right] \quad (3.20)$$

3.4.2 Technique MultiGrille appliquée au contact VEHD

Comme pour le cas sec, la correction MultiGrille utilise le principe de Full Approximation Scheme [VL00b] et emploie un schéma de type V-cycle.

Le problème doit être représenté sur les grilles inférieures H par l'équation :

$$\frac{\xi_{i-1/2,j}^H P_{i-1,j}^H - (\xi_{i-1/2,j}^H + \xi_{i+1/2,j}^H) P_{i,j}^H + \xi_{i+1/2,j}^H P_{i+1,j}^H}{\Delta X^2} + \frac{\xi_{i,j-1/2}^H P_{i,j-1}^H - (\xi_{i,j-1/2}^H + \xi_{i,j+1/2}^H) P_{i,j}^H + \xi_{i,j+1/2}^H P_{i,j+1}^H}{\Delta Y^2} - (\bar{\rho}H)_X^H + (\bar{\rho}H)_T^H = {}_P \hat{f}_{I,J}^H \quad (3.21)$$

où le second membre de l'équation de Reynolds ${}_P \hat{f}^H$ contient la partie des temps précédents des termes de Couette et de *squeeze* du schéma *NU2* :

- si $\Delta X^h \leq \Delta T$:

$${}_P \hat{f}_{I,J}^H = (-2H_{i-1,j}^{T-\Delta T} + 0.5H_{i-2,j}^{T-2\Delta T})/\Delta T \quad (3.22)$$

- si $\Delta X^h > \Delta T$:

$${}_P \hat{f}_{I,J}^H = (-2H_{i-1,j}^{T-\Delta T} + 0.5H_{i-2,j}^{T-2\Delta T})/\Delta T + (1/\Delta T - 1/\Delta X)(-2H_{i,j}^{T-\Delta T} + 0.5H_{i,j}^{T-2\Delta T}) \quad (3.23)$$

et les termes Couette et de *squeeze* de l'équation de Reynolds contiennent ainsi les termes au temps actuel T :

- si $\Delta X^h \leq \Delta T$:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}H)_X^H &= (1/\Delta T - 1/\Delta X)(1.5H_{i,j}^T - 2H_{i-1,j}^T + 0.5H_{i-2,j}^T) \\ (\bar{\rho}H)_T^H &= 1.5H_{i,j}^T/\Delta T \end{aligned} \quad (3.24)$$

- si $\Delta X^h > \Delta T$:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}H)_X^H &= 1.5H_{i,j}^T/\Delta X \\ (\bar{\rho}H)_T^H &= (1/\Delta T - 1/\Delta X)1.5H_{i,j}^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

Cette séparation part du principe que seule la partie au temps actuel va être modifiée durant le processus de résolution.

La représentation du 2^{nd} membre de l'équation de la séparation des surfaces sur les grilles grosses est identique au cas sec :

$${}_H \hat{f}_{I,J}^H = [I_h^H r_{.,.}^h]_{I,J} + \tilde{H}_0 + \frac{X_I^2}{2} + \frac{Y_J^2}{2} + U_v^h \quad (3.26)$$

et U_v^h est repris de l'équation 3.13 où

$$U_e^h = \sum_{J'} K_{I,I',J,J'}^{HH} [I_h^H \tilde{P}_{.,.}^h]_{I',J'} \quad (3.27)$$

avec I, J les indices de la grille grosse H .

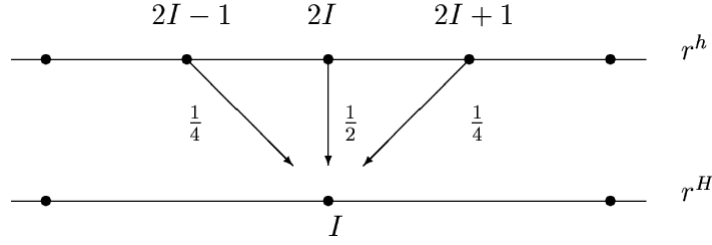


FIGURE 3.2: Schéma de principe de la restriction par full-weighting en 1D [VL00b].

Les fonctions *coarsen* permettent de transférer la séparation des surfaces $H_{i,j}^h$ ainsi que la pression $P_{i,j}^h$ de la grille fine h vers les grilles grosses H . Pour la pression et le 2nd membre de l'équation de Reynolds, la restriction de type *full – weighting* [VL00b] est employée ; le schéma de principe est montré dans la figure 3.2.

La restriction sur la pression suit ainsi l'équation 3.28 :

$$P_{I,J}^H = (4P_{2I,2J}^h + 2(P_{2I+1,2J}^h + P_{2I-1,2J}^h + P_{2I,2J+1}^h + P_{2I,2J-1}^h + P_{2I+1,2J+1}^h + P_{2I+1,2J-1}^h + P_{2I-1,2J+1}^h + P_{2I-1,2J-1}^h))/16 \quad (3.28)$$

Pour l'équation de la séparation des surfaces, une restriction de type *injection* est employée :

$$H_{I,J}^H = H_{I,J}^h \quad (3.29)$$

Avant d'effectuer la restriction pour les 2^{nds} membres de l'équation de la séparation des surfaces et de l'équation de Reynolds, la déformation U_v^H et la séparation des surfaces $H_{I,J}^H$ sont calculées à partir de la pression obtenue par la restriction 3.28. Le second membre de l'équation de la séparation des surfaces subit une restriction type *injection* :

$${}_H\hat{f}_{I,J}^H = -H_0 - U_v^H{}_{I,J} + H_{I,J}^H \quad (3.30)$$

Et pour le second membre de l'équation de Reynolds, la restriction induit :

$$\begin{aligned} P_{I,J}^{\hat{H}} = & (4r_{2I,2J}^h + 2(r_{2I+1,2J}^h + r_{2I-1,2J}^h + r_{2I,2J+1}^h + r_{2I,2J-1}^h + \\ & r_{2I+1,2J+1}^h + r_{2I+1,2J-1}^h + r_{2I-1,2J+1}^h + r_{2I-1,2J-1}^h))/16 + \\ & \frac{\xi_{i-1/2,j}^H P_{i-1,j}^H - (\xi_{i-1/2,j}^H + \xi_{i+1/2,j}^H) P_{i,j}^H + \xi_{i+1/2,j}^H P_{i+1,j}^H}{\Delta X^2} + \\ & \frac{\xi_{i,j-1/2}^H P_{i,j-1}^H - (\xi_{i,j-1/2}^H + \xi_{i,j+1/2}^H) P_{i,j}^H + \xi_{i,j+1/2}^H P_{i,j+1}^H}{\Delta Y^2} - \\ & (\bar{\rho}H)_x^H + (\bar{\rho}H)_t^H \end{aligned} \quad (3.31)$$

où

$$\begin{aligned} r_{I,J}^h = & P_{I,J}^{\hat{h}} - \frac{\xi_{i-1/2,j}^h P_{i-1,j}^h - (\xi_{i-1/2,j}^h + \xi_{i+1/2,j}^h) P_{i,j}^h + \xi_{i+1/2,j}^h P_{i+1,j}^h}{\Delta X^2} + \\ & \frac{\xi_{i,j-1/2}^h P_{i,j-1}^h - (\xi_{i,j-1/2}^h + \xi_{i,j+1/2}^h) P_{i,j}^h + \xi_{i,j+1/2}^h P_{i,j+1}^h}{\Delta Y^2} - \\ & (\bar{\rho}H)_x^h + (\bar{\rho}H)_t^h \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'équation d'équilibre de la charge n'est résolue que sur la grille la plus grosse :

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 - \omega_2 W r^h \quad (3.33)$$

où le résidu vaut :

$$W r^h = W f^h - h_x h_y \sum_i \sum_j \tilde{P}_{i,j}^h \quad (3.34)$$

$W f^h$ vaut $2\pi/3$ sur la grille fine et :

$$W f^H = H_x H_y \sum_I \sum_J \tilde{P}_{I,J}^H + W r^h = H_x H_y \sum_I \sum_J \tilde{P}_{I,J}^H + W f^h - h_x h_y \sum_i \sum_j \tilde{P}_{i,j}^h \quad (3.35)$$

sur les autres grilles.

La correction de la pression lors du *refine* assure la correction de la pression des grilles fines h depuis les grilles grosses H ; elle est identique au cas sec :

$$\bar{P}^h = \tilde{P}^h + I_H^h(\tilde{P}^H - I_h^H \tilde{P}^h) \quad (3.36)$$

3.4.3 Convergence du code de contact VEHD

L'introduction de la propriété de viscoélastique pour la déformation entraîne une convergence difficile du calcul. D'une manière générale, les cas difficiles surviennent pour de grandes valeurs du paramètre de charge M et de petites valeurs du rapport des modules viscoélastiques f (< 5) ou pour des petits M (< 300) et grands f .

Les difficultés de convergence se traduisent par des résidus très importants et très localisés, voir figure 3.3. Ils peuvent produire une stagnation du résidu total empêchant la convergence ou au contraire son augmentation soudaine engendrant une divergence du calcul.

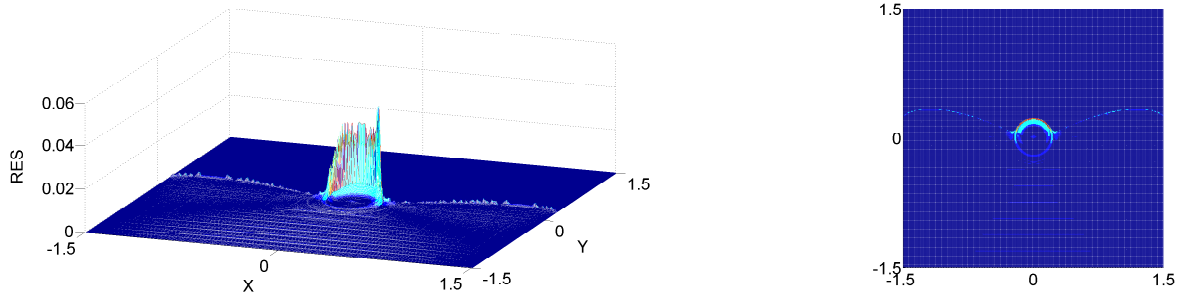


FIGURE 3.3: Résidu localisé pour un cas $M = 500$ et $f = 100$ avec un résidu normé total de $2 \cdot 10^{-3}$

Compte tenu de la nécessité d'atteindre des valeurs extrêmement élevées pour modéliser le contact gomme-sol ($M > 100000$), une longue étude a été menée pour comprendre l'origine de ces difficultés et tenter de les corriger ; elle est visible dans l'annexe A.

3.5 Lubrification viscoélastohydrodynamique en régime permanent par FFT

Cette partie présente la modélisation du contact lubrifié viscoélastique en utilisant la déformation en régime permanent du matériau par FFT.

Cette technique permet de ne pas avoir d'effet transitoire et ainsi de faciliter la convergence de l'équation de Reynolds. De plus n'employant pas de méthode MultiGrille qui présente une difficulté encore non maîtrisée, cette technique permet d'obtenir un résultat dans des temps de calcul raisonnables.

Le contact est considéré comme étant en régime établi, on considère qu'il en est de même pour le fluide ; on peut donc supprimer le terme de *squeeze* de l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} = 0 \quad (3.37)$$

Comme pour le contact sec en régime permanent, le problème est résolu en monogrille. La résolution est de type itérative par relaxation et conserve la différentiation sur ξ/h_x^2 . Il va donc y avoir alternance entre relaxation par point et distributive.

La discrétisation est identique au cas MultiGrille transitoire :

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j} - (\xi_{i-1/2,j} + \xi_{i+1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j}}{\Delta X^2} + \\ & \frac{\xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1} - (\xi_{i,j-1/2} + \xi_{i,j+1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1}}{\Delta Y^2} - \\ & (\bar{\rho}H)_X = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le terme de Couette est discrétisé par une approximation au second ordre en amont ou par un premier ordre si le point est trop près de la condition aux limites du côté X négatifs :

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}H)_X &= (H_{i,j} - H_{i-1,j})/\Delta X & \text{si } i - 2 = 0 \\ (\bar{\rho}H)_X &= (1.5H_{i,j} - 2.0H_{i-1,j} + 0.5H_{i-2,j})/\Delta X & \text{sinon} \end{aligned}$$

La correction de la pression s'effectue ainsi :

$$\bar{P}_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \delta_j \quad (3.39)$$

avec

$$\delta_j = \omega_{jac} \frac{r_{i,j}}{(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2} + \xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) + c_0} \quad (3.40)$$

où

$$\begin{aligned} \xi_{i,j+1/2} &= \frac{0.5(H_{i,j+1}^3 + H_{i,j}^3)}{\bar{\lambda}\Delta Y^2} \\ \xi_{i,j-1/2} &= \frac{0.5(H_{i,j-1}^3 + H_{i,j}^3)}{\bar{\lambda}\Delta Y^2} \\ \xi_{i+1/2,j} &= \frac{0.5(H_{i+1,j}^3 + H_{i,j}^3)}{\bar{\lambda}\Delta X^2} \\ \xi_{i-1/2,j} &= \frac{0.5(H_{i-1,j}^3 + H_{i,j}^3)}{\bar{\lambda}\Delta X^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$(3.42)$$

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= Pf_{i,j} - \frac{\xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j} - (\xi_{i-1/2,j} + \xi_{i+1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j}}{\Delta X^2} - \\ & \frac{\xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1} - (\xi_{i,j-1/2} + \xi_{i,j+1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1}}{\Delta Y^2} + \\ & (\bar{\rho}H)_x \end{aligned} \quad (3.43)$$

et

$$\begin{aligned} c_0 &= (1.5K_{0,0} - 2K_{1,0} + 0.5K_{2,0})/\Delta X & \text{si } i - 2 = 0 \\ c_0 &= K_{0,0}/\Delta X & \text{sinon} \end{aligned}$$

Le calcul de la déformation est identique au cas du contact sec en régime permanent adimensionné par rapport à la déformation au temps infini, voir section 2.6.

Cette technique de calcul présente l'avantage d'être plus stable que le calcul par MultiGrille. Il est possible d'insérer des rugosités dont l'amplitude est très importante, jusqu'à une amplitude 1.5 fois plus importante que la hauteur du film de fluide. Elle présente toutefois des limites lorsque le nombre de points devient important (au delà de 1024^2 points), ce qui empêche l'utilisation de valeurs élevées du paramètre de charge M . Un travail a été effectué au niveau des coefficients de sous-relaxation et de l'initialisation du champ de pression pour rendre le calcul le plus stable possible.

La résolution du contact est beaucoup plus longue que la résolution d'un pas de temps en calcul MultiGrille transitoire, mais reste encore acceptable.

3.6 Résultats

Cette partie présente une comparaison entre les régimes VEHD, EHD et le contact sec viscoélastique.

3.6.1 Contact VEHD transitoire par MultiGrille

Ce cas d'étude d'un contact VEHD emploie la méthode MultiGrille transitoire et représente une sphère rigide en contact avec un massif semi-infini viscoélastique. La lubrification s'effectue par la rotation de la sphère sur elle-même impliquant un glissement pur par rapport au massif. La charge et la vitesse de rotation \bar{v} sont appliquées de manière instantanée comme il est montré dans le cas de chargement ci-dessous :

$$\begin{aligned} t = 0, \quad W = 0, \quad \bar{v} = 0 \\ t > 0, \quad W = 2\pi/3, \quad \bar{v} = 1 \end{aligned}$$

- Le comportement asymptotique du contact VEHD correspond au cas EHD associé. D'abord au premier pas de temps, où le matériau viscoélastique n'a pas eu le temps de se relaxer, et enfin, lorsque le régime permanent est atteint, c-à-d où le matériau viscoélastique s'est totalement relaxé. Dans ces deux cas, le contact VEHD présente des champs de pression et de déformation identiques au cas EHD. Il est nécessaire de prendre en compte le changement de module d'Young du matériau pour effectuer cette comparaison.

Le cas de comparaison est composé de deux calculs EHD et d'un VEHD par MultiGrille transitoire dont le cas de chargement et les propriétés matériau sont définies dans la table 3.2. Les cas EHD ont les mêmes conditions de contact excepté le module élastique de 30 MPa donnant $M = 217.2$ et de 6 MPa donnant $M = 324.79$.

Comme on peut le voir dans les figures 3.4 et 3.5, les champs de pression et de hauteur de film sont identiques entre le cas asymptotique VEHD et son associé en EHD. Les résultats sont dimensionnés. La première asymptote du cas VEHD est visible pour un court temps d'observation par rapport à la constante de temps du matériau viscoélastique ; la seconde est au contraire observable pour un temps d'observation très important par rapport à cette constante de temps.

On note que le matériau relaxé présente d'abord une valeur équivalente de M plus faible que le matériau non-relaxé, et ensuite, une hauteur de film de fluide plus importante. Il sera expliqué dans

module E_0	30 MPa	module E_∞	6 MPa
rapport modules f	4	coefficient de Poisson ν	0.5
temps de relaxation τ	0.2 s	pas de temps Δt	1.10^{-6} s
rayon de courbure R_x	10 mm	charge w	2 N
viscosité η	1.10^{-9} MPa.s	paramètre de charge M	324.79

TABLE 3.2: Paramètres d'entrée des calculs EHD et VEHD.

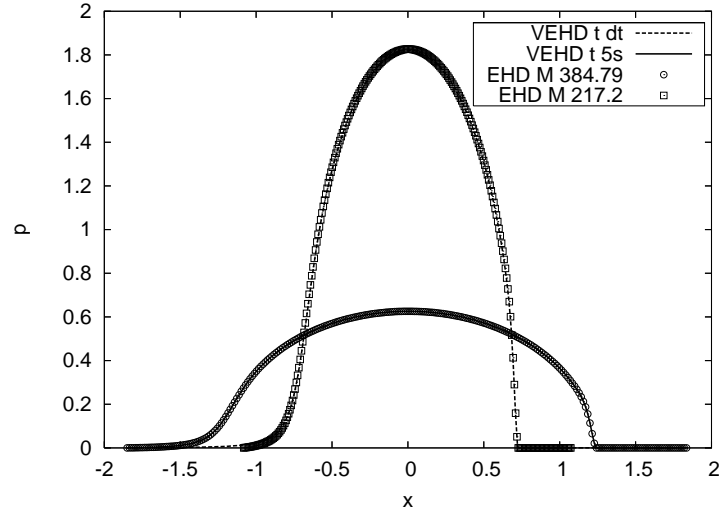


FIGURE 3.4: Pression p (MPa) sur la ligne $y = 0$ mm pour le cas VEHD à $t = 1.10^{-6}$ s et $t = 5$ s et pour les cas EHD à $M = 217.2$ et $M = 324.79$.

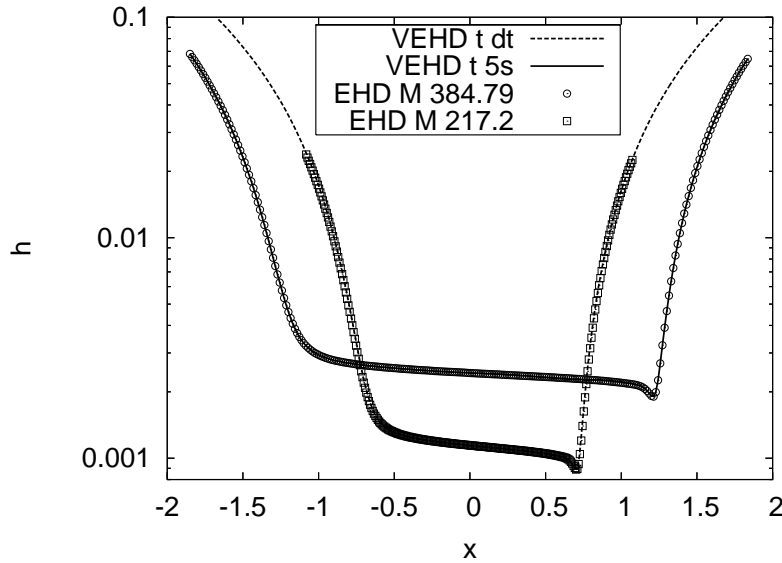


FIGURE 3.5: Hauteur de film h (mm) en échelle log sur la ligne $y = 0$ (mm) pour le cas VEHD à $t = 1.10^{-6}$ s et $t = 5$ s et pour les cas EHD à $M = 217.2$ et $M = 324.79$.

le chapitre 5 en quoi cela affecte l'adhérence.

- La comparaison du champ de pression entre un cas VEHD et un cas sec viscoélastique est présentée dans la figure 3.6. Les caractéristiques du contact sont $M = 324.8$, $f = 4$ et $\tau = 0.5$ s. M étant

relativement élevé, le champ de pression est proche du cas sec. Au cours du temps apparaissent des ondulations dans le cas lubrifié, provenant d'une interaction entre le fluide et la déformation viscoélastique. Ces ondulations disparaissent si le contact atteint un régime stabilisé où le matériau est totalement relaxé.

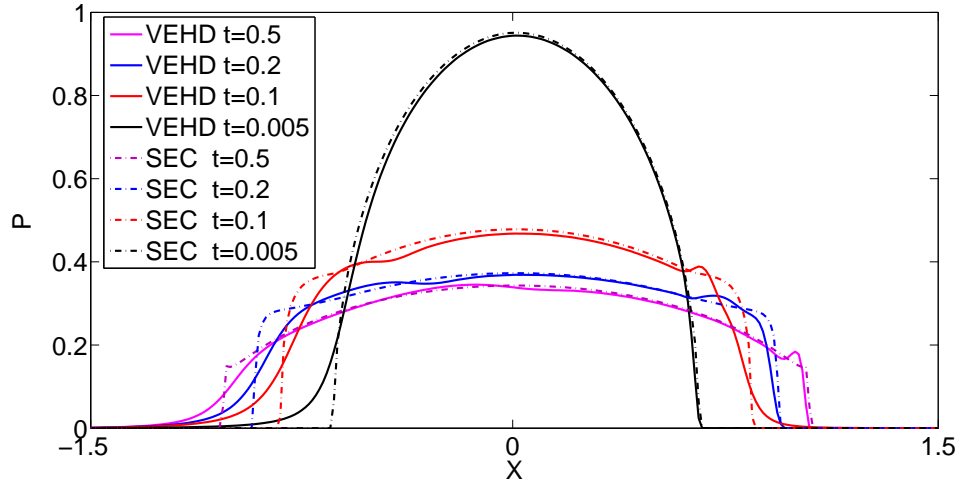


FIGURE 3.6: Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps d'observation.

• Afin de visualiser cette interaction, une comparaison dans le cas VEHD entre des matériaux aux temps de relaxation différents est présentée. L'objectif est de montrer que contrairement au cas sec, le rapport du temps de relaxation sur le temps d'observation, appelé nombre de Deborah [Rei] : $D_e = \tau/t$, présente un résultat différent dans le cas lubrifié. On remarque dans les figures 3.7, 3.8, 3.9 que plus D_e diminue, c-à-d plus le temps s'écoule pour un même temps de relaxation, plus les résultats diffèrent. Il est visible que c'est le matériau au temps de relaxation le plus faible qui présente le plus de fluctuations au cours du temps.

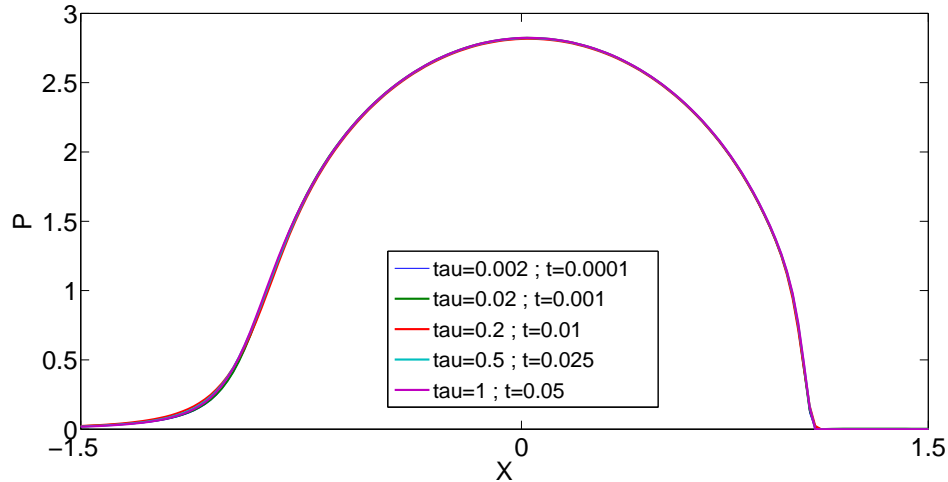


FIGURE 3.7: Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 20$.

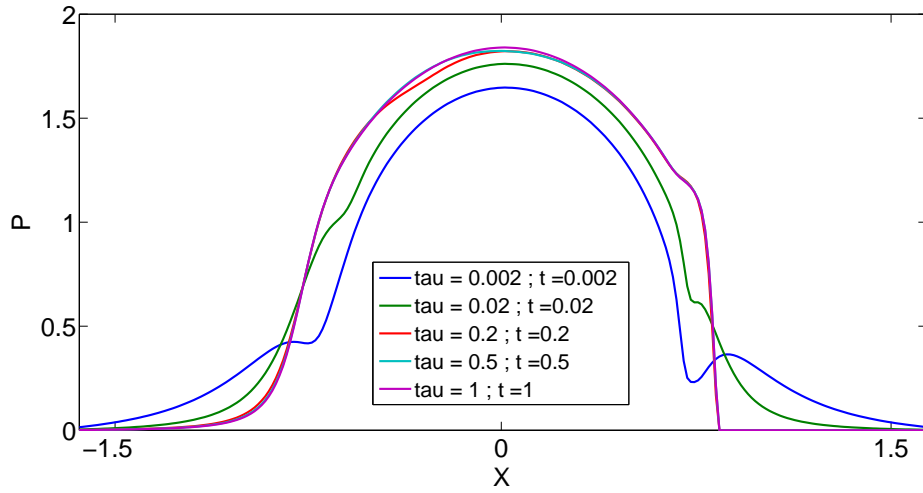


FIGURE 3.8: Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 1$.

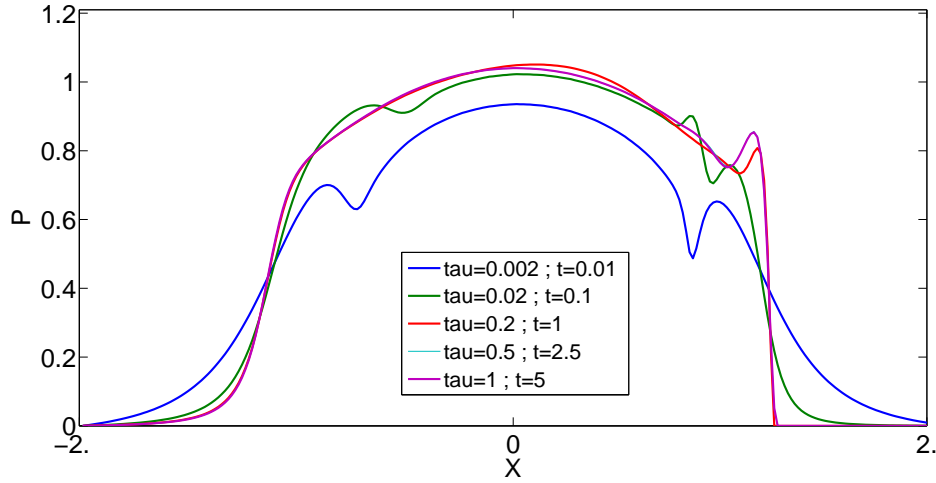


FIGURE 3.9: Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 0.2$.

3.6.2 Contact VEHD en régime permanent par FFT

Cette méthode modélise le contact VEHD d'une sphère rigide en contact avec un massif semi-infini viscoélastique dont la déformation est calculée en régime permanent par FFT. La lubrification s'effectue par le glissement de la sphère sur le massif.

- Une comparaison entre des cas de glissement pur sec et lubrifié viscoélastique est présentée. Les deux simulations emploient la méthode de calcul par FFT. Les paramètres d'entrée sont présentés dans la table 3.3.

La figure 3.10 montre le champ de pression pour les cas sec et VEHD ainsi que la différence de pression $\Delta P = P_{sec} - P_{VEHD}$ sur la ligne centrale en fonction de X . La différence entre les deux cas se situe à l'entrée du contact. Le cas lubrifié présente un gradient de pression progressif qui

augmente légèrement la surface de contact et donc diminue la pression maximale. Il est intéressant de noter que la zone arrière du contact présente une excellente correspondance entre les deux cas contrairement au cas transitoire visible dans la figure 3.6. L'emploi des méthodes asymptotiques utilisant le cas sec peut donc être facilité grâce au comportement du matériau viscoélastique.

<i>rapport modules f</i>	9	<i>temps de relaxation τ</i>	1.10^{-5}
<i>vitesse de glissement adimensionnée V_g</i>	21072	<i>paramètre de charge M</i>	250
<i>dimensions du domaine $X Y$</i>	6.5 6.5	<i>nombre de points $X Y$</i>	512 512

TABLE 3.3: Paramètres d'entrée des calculs sec et VEHD.

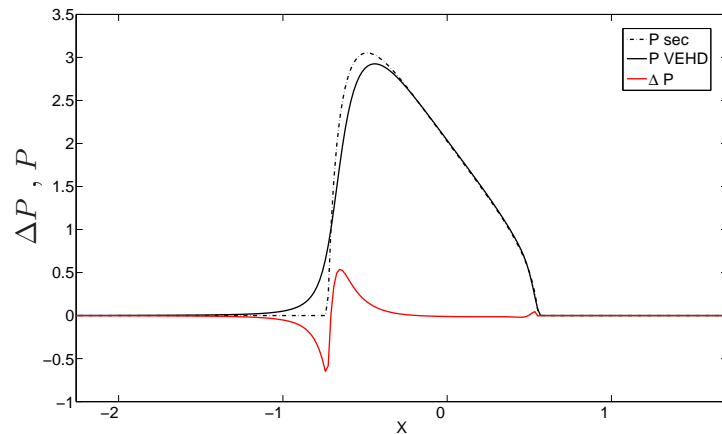


FIGURE 3.10: Pression P et différence de pression ΔP sur la ligne $Y = 0$ entre les cas de contact sec et VEHD.

La différence de déformation viscoélastique est présentée dans la figure 3.11. En valeur absolue, la différence de déformation est beaucoup plus faible que la différence de pression entre les cas VEHD et sec. Comme pour la pression, la zone présentant le plus de différence est la zone d'entrée du contact comme dans les cas EHD à forts M .

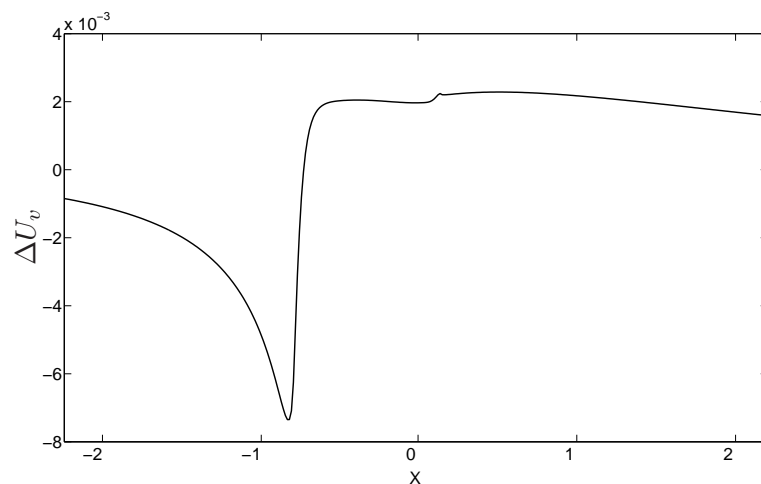


FIGURE 3.11: Différence sur la ligne $Y = 0$ entre la déformation viscoélastique U_v des cas de contact sec et VEHD.

3.7 Conclusion

La lubrification employant l'équation de Reynolds a été étudiée. A partir de cette équation, deux méthodes ont été appliquées, une dans le cas transitoire utilisant la technique MultiGrille et l'autre en régime permanent utilisant la FFT. Ces deux méthodes emploient chacune des stratégies de résolution efficaces. Comme dans le cas sec, elles présentent les mêmes avantages et inconvénients d'un point de vue temps de calcul et exhaustivité de résultat.

La résolution de cas extrêmes entraîne des difficultés d'ordre numérique. Ainsi, une démarche a été mise en place afin de résoudre les problèmes engendrés par l'introduction de la viscoélasticité.

Enfin, le cas VEHD a été comparé aux cas sec viscoélastique et EHD, à la fois en roulement et en glissement pur. Une interaction a été montrée entre le fluide et la déformation viscoélastique, entraînant une compréhension très difficile du problème. Néanmoins, le régime permanent obtenu en glissement pur montre un comportement très similaire entre les cas sec et VEHD.

Chapitre 4

Contact lubrifié EHD rugueux

4.1 Introduction

La théorie de réduction d'amplitude (TRA) a été créée pour prédire la diminution de l'amplitude de la rugosité dans un contact lubrifié fortement chargé, composé de matériaux métalliques et d'une huile pour lubrifiant. Le cas de cette étude est sensiblement différent, puisque la route est composée de matériaux beaucoup plus rigides que la gomme et que le lubrifiant est de l'eau. La TRA est appliquée à ce contact mou pour décrire la déformation de la gomme en fonction des caractéristiques géométriques de la route et des paramètres du contact. Bien que le matériau du pain de gomme en contact avec la route soit viscoélastique, cette étude restera dans le cadre élastique. Elle servira de base à une extension supplémentaire pour un matériau viscoélastique. Le lubrifiant est isovisqueux et le contact est en roulement pur, cas sensiblement différent du comportement réel du pneumatique. Le but est de connaître l'impact de la lubrification sur la déformation de la gomme pour en déduire la diminution du coefficient de frottement par rapport au cas sec.

Ce chapitre débute par une introduction technique et bibliographique de l'impact de la rugosité sur la performance des contacts EHL. Ensuite, une explication théorique des outils employés est développée puis les résultats obtenus sont étudiés. Enfin, la non-extension au cas viscoélastique est expliquée.

4.2 Bibliographie

La lubrification de contacts mous joue un rôle très important dans les composants technologiques, notamment les joints d'étanchéité et les pneumatiques.

La rugosité a une forte influence sur la performance des contacts. L'usure, la capacité de charge et le frottement sont impactés.

Comme il a été expliqué dans le chapitre précédent, les contacts mous engendrent peu de contraintes, les pressions de contact étant faibles, le fluide va conserver ses propriétés comme la densité ρ et la viscosité η .

Les déformations apparaissent à faible pression car le module élastique de la gomme du pneumatique est faible. Ainsi, de grandes déformations peuvent apparaître à la fois à l'échelle macroscopique (dimension du contact) et à l'échelle microscopique (dimension de la rugosité). Par conséquent, le comportement est proche de celui du contact EHL fortement chargé. Ces deux régimes sont distinguables par le comportement du fluide, isovisqueux pour le cas présent et piezovisqueux pour le cas fortement chargé.

La rugosité dans les contacts de joints d'étanchéité a été étudiée à la fois théoriquement [TS09b, TS09a, SS00a, Sal07, GP92, SAP10] et expérimentalement [KV88, PGBQ92, RSNJ01]. Pour le pain de gomme, l'impact de la rugosité sur l'adhérence sur sol mouillé a aussi été étudié théoriquement [PTAT05, Moo72] et expérimentalement [Moo72, Pan07, Rob77]. La plupart de ces études n'emploient pas de paramètres déterministes dans la représentation des rugosités mais utilisent des techniques comme les facteurs de débit de Patir et Cheng [PC78, PC79] ou une modification de la rugosité réelle dans un calcul de contact sec. Hadinata et Stephens [HS07] ont étudié l'effet de la rugosité de l'arbre, à la géométrie déterministe, sur la capacité de charge des joints d'étanchéité. Ils ont montré que l'orientation de cette rugosité, composée de triangles, a une incidence sur le coefficient de frottement et sur l'étanchéité des joints.

Dans le cadre général, la lubrification de solides mous dans des contacts rugueux a d'abord été étudiée par Hooke [HL96] pour le cas I.E. . Shinkarenko et al. [SKE08] ont étudié numériquement le contact entre un solide élastique mou et un solide rigide composé de trous répartis suivant un quadrillage. Leur étude a montré que ces trous permettent d'augmenter la capacité de charge du contact. Par la suite [SKE09], ils ont ajouté des propriétés matériaux plus réalistes pour le caoutchouc comme la loi de comportement hyperélastique de Mooney-Rivlin ainsi qu'une prise en compte des grandes déformations. Cette complexité supplémentaire montre que l'élasticité linéaire suffit à représenter le comportement d'une manière qualitative, les différences de résultats se situant sous les 5%. Ce résultat conforte le choix de débiter cette étude avec un matériau élastique, permettant d'apporter déjà une bonne approximation du contact réel. Enfin, Scaraggi et al. [SDC11] ont étudié expérimentalement des contacts mous rugueux et mis en évidence la présence de zones de lubrification micro-EHD.

La déformation de la rugosité en régime P.E. a été largement étudiée en utilisant des profils mesurés de rugosité [EES99] et en étudiant le comportement de surfaces sinusoïdales. C'est cette seconde approche qui est utilisée dans cette étude. La littérature sur la réduction d'amplitude [HV00, HL06, LV99] montre qu'une courbe maîtresse unique est obtenue lorsque l'amplitude de la déformation relative A_d/A_i est tracée en fonction du paramètre adimensionné $\nabla = (\lambda/a)(\sqrt[3]{M}/\sqrt[6]{L})$, où λ est la longueur d'onde de la sinusoïde, a est le rayon de contact et M et L les paramètres de Moes.

Le paramètre ∇ a été interprété comme le rapport de la longueur d'onde de la sinusoïde sur la longueur d'entrée du contact [HV00]. Il est clair que cette approche est intéressante, puisqu'elle prédit analytiquement le comportement du contact. En utilisant une décomposition de Fourier, l'influence de la rugosité réelle d'une surface sur la déformation du solide élastique peut être ainsi analysée en fonction des paramètres du contact. Là où l'analyse d'une rugosité réelle demandera de nombreux calculs pour obtenir une moyenne, la décomposition en série de Fourier permet de cibler l'information et de faciliter la compréhension de chaque type de rugosité.

Les prédictions de la TRA en conditions de roulement pur ont été récemment validées expérimentalement par Sperka et al. [SKH10]. Leur travail porta sur le contact d'une sphère rugueuse en acier sur un disque en verre lisse recouvert de chrome et lubrifié par de l'huile. Cette étude, visible dans la figure 4.1, compare la topologie de la surface rugueuse de la sphère, aux mesures de hauteur de film lorsque le contact est lubrifié. Il est visible que la hauteur des rugosités est diminuée dans les deux cas et plus fortement dans le cas en roulement pur.

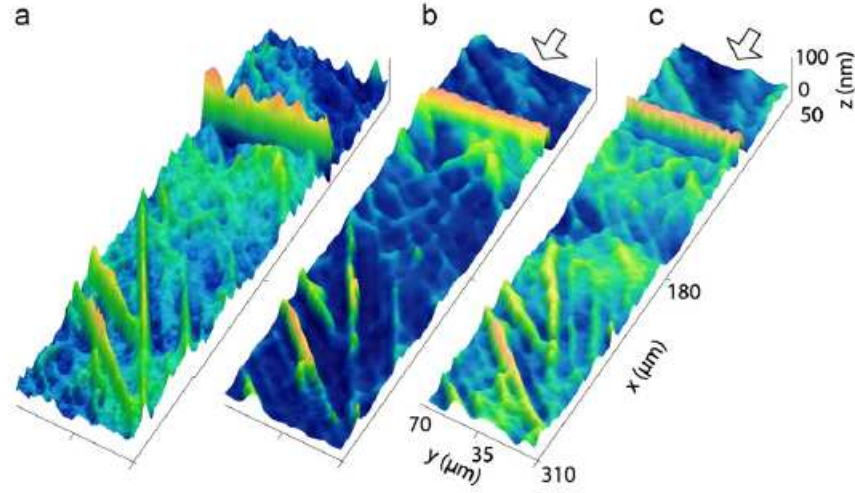


FIGURE 4.1: Exemple de mesure in-situ : (a) inverse de la topographie de surface ; (b) vue 3D de la hauteur de film en conditions de roulement pur ; (c) vue 3D de la hauteur de film en conditions de roulement-glissement. [SKH11]

Il est évident que l'utilisation directe, pour le régime I.E, du paramètre ∇ utilisé par Lubrecht et al [LV99] est impossible car $\nabla \rightarrow \infty$ pour $L = 0$. Donc une extension de la théorie actuelle est nécessaire pour le régime I.E. en roulement pur. En particulier, un nouveau paramètre ∇ doit être trouvé. Néanmoins, Hooke [Hoo99] a étudié la réduction d'amplitude pour un contact linéique en régime I.E. avec un paramètre similaire. Il trouva une courbe maîtresse unique, mais avec une grande dispersion dans la zone de transition.

4.3 Théorie et modélisation

- La construction de la TRA en contact circulaire et régime I.E. nécessite la modélisation du contact entre deux sphères élastiques en conditions de roulement pur.

L'équation de Reynolds est donc sous sa forme transitoire et adimensionnée à partir des paramètres d'Hertz :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \quad (4.1)$$

où $\xi = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda}$ avec $\bar{\lambda} = \frac{12u_m\eta_0 R_x^2}{a^3 p_h}$.

Les conditions aux limites sont : $P(X_a, Y, T) = P(X_b, Y, T) = P(X, Y_a, T) = P(X, Y_b, T) = 0, \forall T$ où X_a, X_b, Y_a et Y_b dénotent les frontières du domaine.

Par ailleurs, la condition de cavitation $P(X, Y, T) \geq 0, \forall X, Y, T$ doit être satisfaite.

La densité ρ et la viscosité η sont considérées comme constantes à cause du régime I.E. et des faibles pressions de contact, par conséquent : $\bar{\rho} = \bar{\eta} = 1$.

L'équation d'épaisseur du film est adimensionnée en utilisant les mêmes paramètres d'Hertz et en tenant compte d'une rugosité en mouvement \mathcal{R} :

$$H(X, Y, T) = H_0(T) + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} - \mathcal{R}(X, Y, T) + \frac{2}{\pi^2} \int \int_{\Omega} \frac{P(X', Y', T) dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \quad (4.2)$$

où $\mathcal{R}(X, Y, T)$ représente la géométrie non-déformée de la rugosité au temps adimensionné T et $H_0(T)$ est une constante pour décrire la séparation des surfaces. La rugosité \mathcal{R} est modélisée par une sinusoïde :

$$\mathcal{R}(X, Y, T) = A_i \cos(2\pi a (X - \frac{2u_2}{u_1 + u_2}T)/\lambda) \cos(2\pi a Y/\lambda) \quad (4.3)$$

où u_1 et u_2 sont les vitesses des 2 solides, A_i l'amplitude de la rugosité et λ la longueur d'onde.

La déformation élastique est calculée avec la méthode MLMI. L'étude portant sur des conditions de roulement pur, les déformations transversales sont négligées bien que le contact soit mou. Le phénomène de *dimple*, causé par la variation de vitesse créée par la déformation transverse du solide a été mis en évidence par Kaneta et al. [KNKM96] et expliqué par Kudish [Kud00].

Toutes les équations sont discrétisées suivant un schéma précis au second ordre et employant la méthode MultiGrille selon les mêmes équations que le chapitre précédent.

Par simplicité, la rugosité est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y$. L'équation de la rugosité 4.3 est amortie en utilisant une exponentielle pour démarrer par un contact lisse dans des conditions de régime permanent. Cela permet d'éviter les effets de démarrage non-physiques.

- L'amplitude de la déformation est mesurée lorsque la réponse de la hauteur de film est périodique en régime permanent.

L'amplitude initiale de la rugosité A_i est choisie inférieure ou égale à 10% de la hauteur de film centrale H_c pour rester dans le domaine linéaire. Une extension non-linéaire de la théorie est décrite par Biboulet et al. [BLH08a, BLH08b].

À chaque pas de temps, la condition d'équilibre des forces est imposée, voir équation 2.10. Cette équation induit que les forces d'accélération des solides en contact sont négligées.

L'amplitude déformée est définie comme une fonction des conditions d'opération en utilisant la relation suivante :

$$A_d = \frac{\max_T H(0, 0, T) - \min_T H(0, 0, T)}{2} \quad (4.4)$$

Le temps T est choisi suffisamment large pour éviter les effets de démarrage.

- Le contact lubrifié EHD mou peut être interprété comme un contact entre un solide rigide rugueux face à un solide mou. En conséquence, seul le solide lisse et élastique mou va se déformer. Cette vision est différente de tous les cas précédents de la TRA, mais elle est plus pertinente face au cas d'application de cette étude.

Ainsi dans un contact gomme-sol, le solide rigide et rugueux sera la route, alors que le lisse et élastique sera le pain de gomme. D'une même manière, dans un contact joint d'étanchéité/arbre, le solide rigide et rugueux sera l'arbre ; le lisse et élastique sera le joint.

Les résultats décrivent l'influence de la rugosité du solide rigide sur la déformation du solide élastique lisse.

4.4 Résultats

- Les résultats sont décrits à partir du rapport A_d/A_i qui représente la variation de la hauteur de film au centre du contact par rapport à l'amplitude initiale de la rugosité. Le rapport entre l'amplitude de la rugosité sur la hauteur de film en contact lisse étant relativement faible : $A_i \leq 0.1 H_c$, la réponse d' A_d par rapport à A_i reste linéaire. Les résultats peuvent être alors étudiés sous forme du rapport A_d/A_i au lieu d' A_i seulement.
- La figure 4.2 montre les résultats d'un calcul de la hauteur de film ainsi que la pression sur la ligne centrale avec des fluctuations amplifiées et la figure 4.3 montre les mêmes résultats en 3D pour $M = 1000$ et $\lambda/a = 0.5$.

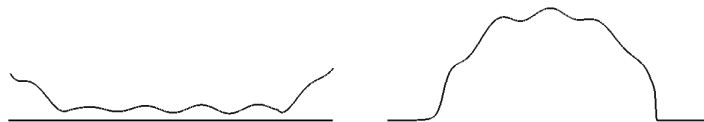


FIGURE 4.2: *Fluctuations de la hauteur de film et de la pression sur la ligne centrale $Y = 0$.*

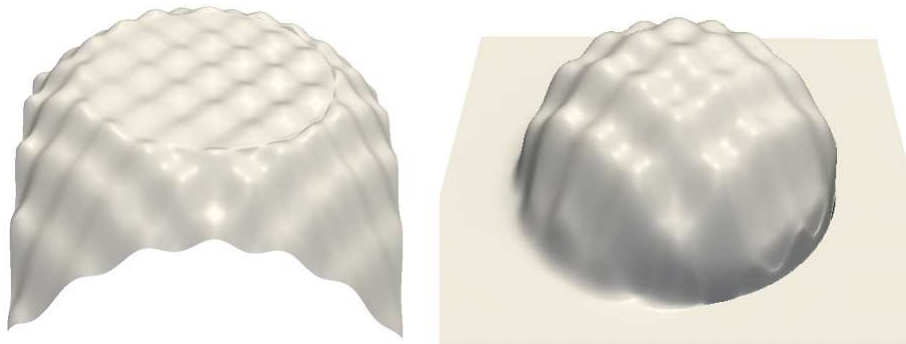


FIGURE 4.3: *Distribution de la hauteur de film et de la pression en 3D.*

Comme montré sur la figure 4.4, la rugosité crée des variations de pression qui engendrent une déformation du solide élastique. Pour des conditions de roulement pur, la déformation a la même phase que celle de la rugosité. Dans cet exemple, la déformation a une amplitude de moitié inférieure à celle de la rugosité initiale : $A_d/A_i = 0.5$.

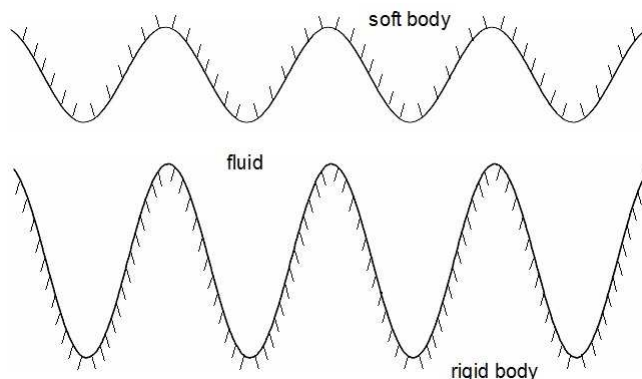


FIGURE 4.4: *Géométrie du contact en 2D pour $A_d/A_i = 0.5$.*

- L'approche la plus directe pour modifier le paramètre ∇ en régime I.E. consiste à supprimer du dénominateur le paramètre matériau de Moes L :

$$\nabla = (\lambda/a)\sqrt[2]{M} \quad (4.5)$$

La figure 4.5 présente la réduction d'amplitude A_d/A_i en fonction du paramètre modifié ∇ . Les calculs numériques effectués en faisant varier M et λ montrent qu'une unique courbe maîtresse est obtenue avec ce paramètre. Le paramètre de charge M varie sur une plage allant de 500 à 2000 et le paramètre adimensionné de la longueur d'onde de la rugosité λ/a de 0.15 à 3.

Les résultats montrent que la courbe unique est obtenue avec une légère dispersion autour de $A_d/A_i = 0.5$. Cette dispersion est similaire à celle obtenue par Hooke [Hoo99] pour le problème du contact linéique I.E.

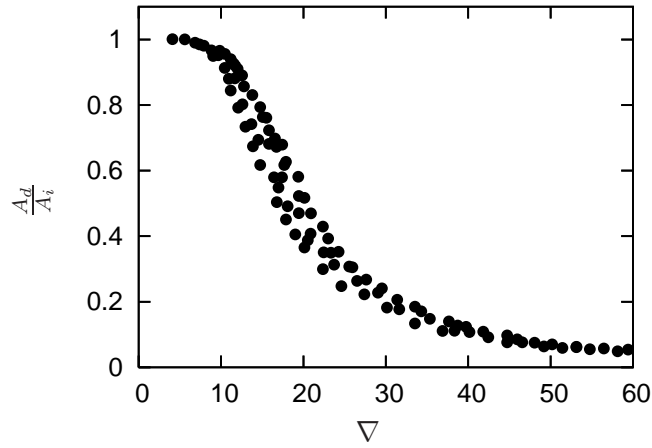


FIGURE 4.5: A_d/A_i en fonction de ∇ en régime IE.

Une analyse plus détaillée de la dispersion est présentée dans la figure 4.6. Il en est déduit que la relation entre ∇ et M peut être améliorée. Cette dispersion n'est pas aléatoire car les hautes valeurs de M résident constamment au-dessus des faibles valeurs de M . Ce décalage dans le sens de l'abscisse traduit un problème dans le rapport de puissance entre λ et M .

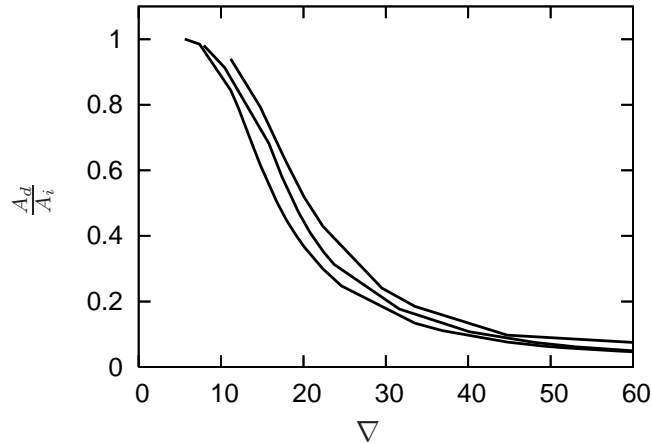


FIGURE 4.6: A_d/A_i en fonction de ∇ pour $M = 500$ en bas, $M = 1000$ et $M = 2000$ en haut.

Pour réduire cette dispersion, la puissance sur M est modifiée. Un meilleur ajustement est trouvé pour une puissance de $1/3$:

$$\bar{\nabla} = (\lambda/a) \sqrt[3]{M} \quad (4.6)$$

Ce paramètre diffère ainsi fortement de celui obtenu par Hooke [Hoo99] pour le problème de contact linéique :

$$\nabla_H = \frac{\lambda}{b \cdot g_3^{0.8}} \quad (4.7)$$

où λ/b est la longueur d'onde adimensionnée par rapport à la demi-largeur du contact et g_3 le paramètre d'élasticité : $g_3 = \sqrt[2]{W^2/\eta_0 u E' R'}$.

Un ajustement des données à partir de deux paramètres est effectué, le résultat est différent des relations en lubrification EHD en régime P.E. :

$$\frac{A_d}{A_i} = \frac{1}{1 + 0.0018 \bar{\nabla}^{7/2}} \quad (4.8)$$

La figure 4.7 montre qu'une courbe unique avec beaucoup moins de dispersion est obtenue avec le paramètre $\bar{\nabla}$. L'équation 4.8 recale les données fidèlement.

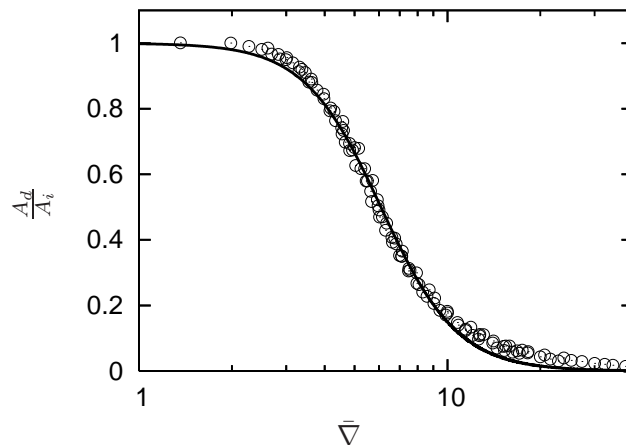


FIGURE 4.7: A_d/A_i en fonction de $\bar{\nabla}$, courbe continue : équation 4.8.

Cette courbe comporte deux asymptotes séparées par une zone de transition. La première asymptote à $A_d/A_i = 1$ signifie que le pain de gomme ne subira pas de déformations dues aux rugosités. Elle se situe pour $\bar{\nabla} = 0$, traduisant des rugosités de courtes longueurs d'onde ou un module d'Young élevé. La seconde asymptote $A_d/A_i = 0$ indique que le pain de gomme se déformera autant qu'en contact sec. Ce cas est valable pour $\bar{\nabla} \rightarrow \infty$ indiquant des rugosités de grandes longueurs d'onde ou un module d'Young faible. On peut en déduire que dans les cas où $\bar{\nabla} \rightarrow \infty$, le coefficient de frottement provenant de la déformation ne subira aucune perte par rapport au cas sec.

La puissance du M diffère entre les régimes P.E. et I.E., ce qui ne surprend pas lorsque l'on se souvient de la dépendance du M sur la hauteur du film (I.E. : $H_{ie}^M = 1.96M^{-1/9}$ et P.E. : $H_{pe}^M = 1.25M^{-1/12}L^{3/4}$), voir [Moe00]. Ainsi, il paraît difficile de créer une relation simple permettant une transition entre les régimes P.E. et I.E. pour l'équation de la réduction d'amplitude 4.8.

En régime P.E. il était simple de supposer que l'amplitude de la rugosité était constante dans la "zone haute pression", puisque le flux de Poiseuille est nul dans cette zone. Le problème est plus

complexe en régime I.E. à cause de l'isoviscosité ; les variations de pressions décroissent en se dirigeant vers la sortie du contact. Ainsi, le terme de Poiseuille n'est pas nul, ce qui engendre des variations de l'amplitude de la rugosité.

Ces fluctuations ont été étudiées dans la zone de contact. Dans tous les cas, A_d croît en fonction de la direction X . Suivant cette direction, les variations sont inférieures à 10% par rapport à la valeur au centre du contact, dans les cas où la longueur d'onde de la rugosité est suffisamment grande ($\lambda/a > 1$). Il est possible de modéliser cette variation dans la direction X [CVL06] mais cela est bien plus complexe dans la direction Y .

4.5 Extension à la viscoélasticité

Pour une meilleure prédiction de la théorie, il est logique d'essayer d'inclure la propriété viscoélastique du matériau.

Le matériau viscoélastique dépend de deux caractéristiques principales, assimilables à un module élastique et à une constante de temps, que le matériau ait une ou plusieurs branches. Afin d'inclure ces caractéristiques dans le paramètre de réduction d'amplitude $\bar{\nabla}$, il faut d'abord les relier sous un paramètre unique pour qu'elles décrivent la déformation. Une série de calculs en contact sec est effectuée avec une géométrie composée d'une sphère en contact avec un massif semi-infini composé d'un matériau viscoélastique.

La figure 4.8 montre le coefficient de frottement μ en fonction du paramètre $\bar{\nabla} = V_g \cdot \tau \cdot (f + 1)$ pour un matériau avec une branche et pour 3 différents rapports de viscoélasticité $f + 1$. V_g est la vitesse de glissement de la sphère et τ la constante de temps du matériau. Ce paramètre est inspiré de celui de Grosh [Gro07].

On remarque que, pour chaque rapport $f + 1$, le paramètre décrit correctement le coefficient de frottement puisque l'on obtient une courbe unique sans dispersion ni recouvrement. Seulement le paramètre $\bar{\nabla}$ ne regroupe pas les matériaux composés d'un rapport $f + 1$ différent sous une courbe unique. Cela demanderait donc d'ajouter un paramètre supplémentaire pour décrire la réduction d'amplitude ; une surface en deux dimensions serait alors nécessaire.

Le matériau du pain de gomme étant complexe, un modèle de Zener composé de plusieurs branches est nécessaire pour en obtenir une bonne description. La figure 4.9 représente le coefficient de frottement μ en fonction du paramètre $\bar{\nabla}_2 = V_g/K \cdot (\tau_1 \cdot K_1 + \tau_2 \cdot K_2)$, pour deux matériaux avec deux branches au rapport de viscoélasticité $f + 1 = 9$ mais au rapport τ_1/τ_2 de 10 et de 1000. Dans ces calculs, tous les paramètres varient sauf τ_1 et τ_2 .

On remarque une dispersion pour une même valeur du paramètre $\bar{\nabla}_2$. Il ne permet donc pas de décrire correctement le comportement d'un matériau à 2 branches.

Un autre type de paramètre est proposé en calculant une propriété du matériau viscoélastique comme le module de perte G'' ou le facteur de perte $\tan\delta$ qui sont régulièrement employés dans la littérature. La figure 4.10 montre que ce type de paramètre ne permet pas non plus de représenter correctement le coefficient de frottement du matériau.

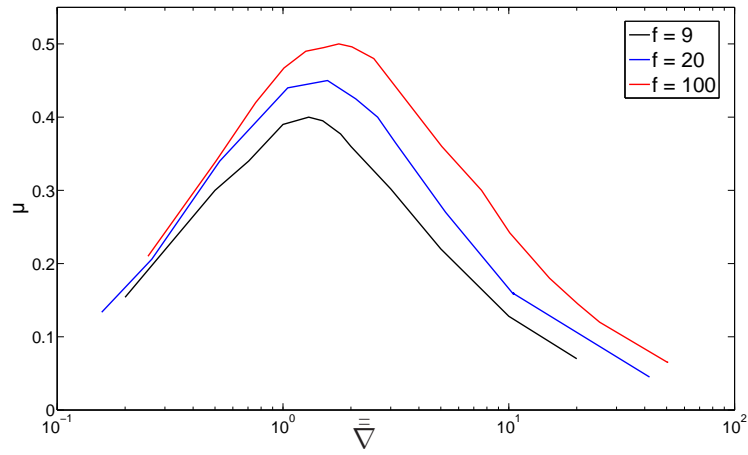


FIGURE 4.8: Coefficient de frottement μ en fonction de $\bar{\Delta}$ pour un matériau à 1 branche

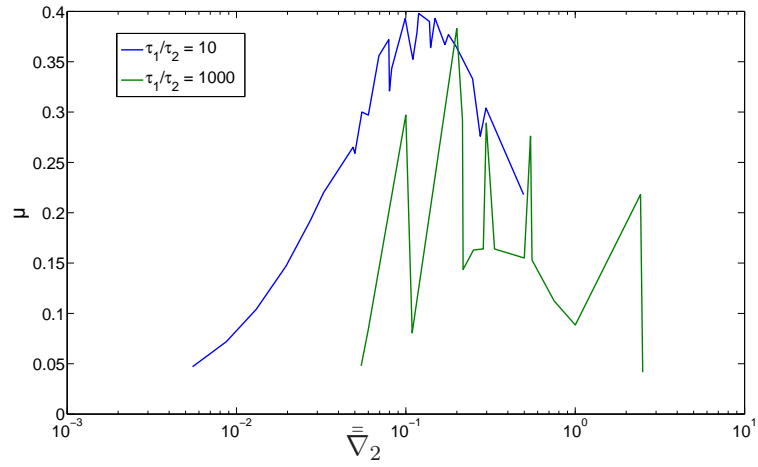


FIGURE 4.9: Coefficient de frottement μ en fonction de $\bar{\Delta}_2$ pour deux matériaux à 2 branches

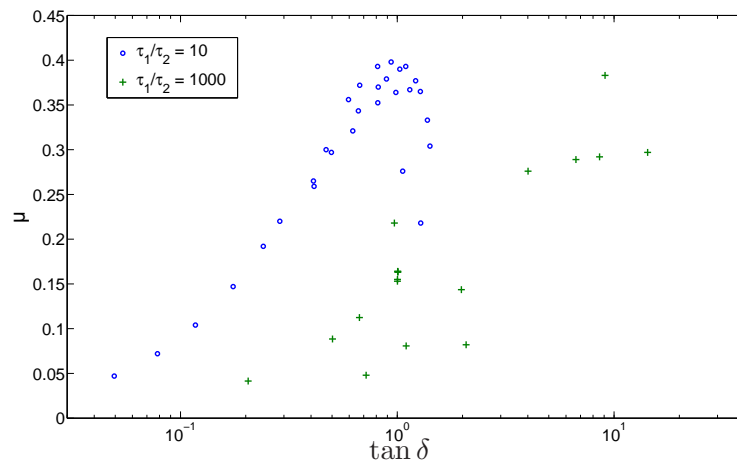


FIGURE 4.10: Coefficient de frottement μ en fonction de $\tan \delta$ pour deux matériaux à 2 branches

Cette première étape montre qu'il n'est actuellement pas possible de représenter sous un paramètre unique le comportement du contact d'un matériau viscoélastique réaliste. Néanmoins, en première étape d'amélioration, l'étude d'un matériau viscoélastique à une branche et à un rapport de viscoélasticité $f + 1$ constant est encore possible. Mais le chapitre précédent montre qu'actuellement, la simulation VEHD n'est pas suffisamment robuste pour des cas de charge représentatifs d'un matériau mou. L'extension de la théorie de réduction d'amplitude à un matériau viscoélastique n'est donc pas possible pour l'instant.

Enfin, il est probable que l'emploi de deux paramètres soit nécessaire pour réaliser cette extension.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'extension de la Théorie de Réduction d'Amplitude pour des cas de contact circulaire EHL en régime isovisqueux-élastique et en roulement pur. Ce travail a montré qu'une unique courbe maîtresse existe. Elle décrit la déformation du solide mou élastique en fonction de tous les paramètres du contact. La déformation du solide élastique est maximale pour les rugosités de grandes longueurs d'onde ou les modules d'Young faibles, c-à-d $A_d/A_i(\nabla \rightarrow \infty) = 0$. Elle est minimale pour les longueurs d'onde courtes ou un module d'Young élevé : $A_d/A_i(\nabla = 0) = 1$.

Le paramètre $\bar{\nabla}$ a permis d'établir une courbe maîtresse unique à partir de tous les paramètres dans le contact (a , λ et M). Il est donc maintenant possible d'avoir une approximation de la diminution de l'amplitude de la déformation du pain de gomme par rapport au cas sec et ainsi d'obtenir une diminution du coefficient de frottement provenant de l'adhérence par indentation.

Malheureusement, la relation entre ∇ et M est différente entre les régimes I.E. et P.E., rendant la transition entre les deux régimes plus complexe.

A cause du comportement du régime I.E., il n'est pas possible d'étendre les résultats de la zone centrale du contact vers l'aire de contact complète. Les résultats seront interprétés comme étant une moyenne du résultat sur la zone de contact.

Enfin, en raison d'une robustesse de calcul insuffisante du code VEHD, l'extension de la théorie de réduction d'amplitude au cas viscoélastique n'a pas été étudiée.

Chapitre 5

Diminution de l'adhérence de la gomme sur sol mouillé

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les outils de modélisation ainsi que la théorie de réduction d'amplitude ont été présentés. Ce chapitre présente leur application afin de calculer la diminution du coefficient de frottement et apporter une meilleure compréhension du phénomène d'adhérence sur sol mouillé.

Ce chapitre débute par une étude bibliographique sur les mesures de sols routiers, les diverses théories de diminution de l'adhérence sur sol mouillé et sur les méthodes de calcul du coefficient de frottement. Afin de cibler les caractéristiques du contact, une étude des propriétés du sol routier est présentée ainsi qu'une étude numérique du contact du pain de gomme sur le sol. Par la suite, le modèle de diminution du coefficient de frottement est décrit et vérifié. Ensuite, l'application de ce modèle est présentée sur deux types de surfaces. Enfin, une conclusion générale est tirée de ces résultats.

5.2 Bibliographie

Le calcul de l'impact de l'eau sur le coefficient de frottement de la gomme nécessite l'étude de différents sujets. Le premier concerne les caractéristiques du sol routier, elles sont importantes afin de comprendre le régime de fonctionnement du contact et donc les hypothèses applicables dans nos modèles. Le deuxième consiste en l'étude du phénomène créant la perte d'adhérence du pneumatique. Enfin, le dernier étudie les différentes méthodes du calcul du coefficient de frottement.

5.2.1 Caractéristiques du sol routier

En 1971, à partir de mesures de sol routier utilisant un palpeur, Yandell [Yan71] proposa une vision du sol fonctionnant par échelles. Il considéra le sol routier comme une superposition de textures allant de l'échelle microscopique au centimètre. Ainsi, ces textures ont des dimensions fixes constituées d'une amplitude et d'un angle au sommet qui peut être assimilé à une longueur d'onde. Ces échelles créent alors des discontinuités dans le spectre du sol, contrairement à une surface fractale. En 1975 [YG75], Yandell et al utilisèrent en plus un microscope optique ainsi qu'un microscope électronique pour décrire le sol à une échelle allant jusqu'au micromètre ; les résultats sont visibles dans la table 5.1.

<i>amplitude (mm)</i>	<i>longueur d'onde (mm)</i>
2.18	48.3
0.36	6.7
0.1	1.57
0.031	0.38
0.025	0.61
0.013	0.25
0.0076	0.057
0.0046	0.075

TABLE 5.1: *Amplitude (mm) en fonction de la longueur d'onde (mm) pour chaque échelle du sol mesuré par Yandell et al [YG75].*

La seconde approche, plus utilisée par la suite, est une vision fractale du sol qui repose sur le principe selon lequel la géométrie de la surface du sol apparaît identique quel que soit le facteur de grossissement. Le sol est considéré auto-affine, c-à-d qu'il présente une caractéristique fractale allant de l'échelle microscopique à l'échelle millimétrique. Ensuite, l'amplitude de la rugosité est considérée constante pour les dernières grandes longueurs d'onde qui représentent les sommets des cailloux. La densité spectrale de puissance (DSP) $S(f)$ peut ainsi décrire analytiquement la partie fractale du sol :

$$S(f) = \frac{K}{f^\beta} \quad (5.1)$$

avec K une constante, $\beta = 7 - 2D_f$ où D_f est la dimension fractale.

Persson [PAT⁺05] montra que l'asphalte routier a une dimension fractale D_f généralement proche de 2.2. Il mit en évidence que le frottement de la gomme use la surface de la route, notamment sur les routes pavées. Ainsi, la figure 5.1a) montre que la DSP du pavé usé est légèrement plus affectée sur les grandes longueurs d'onde que sur les petites. L'usure due au contact de la gomme, majoritairement superficiel, est prouvée par la figure 5.1b) qui montre que la DSP est environ 30 fois plus importante dans les creux que sur les sommets de ces surfaces, quelle que soit la longueur d'onde.

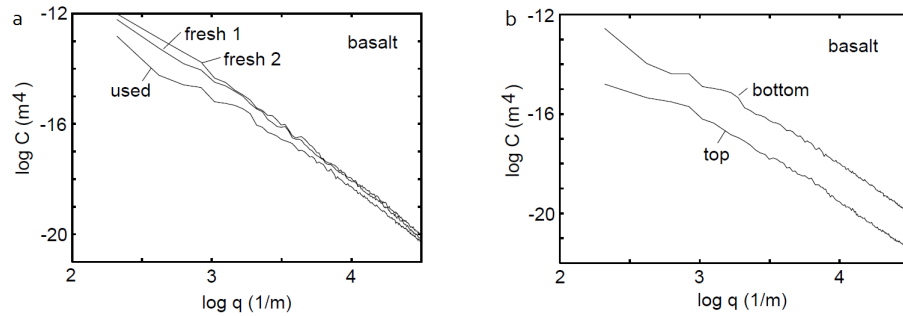


FIGURE 5.1: a) *DSP de la rugosité d'un pavé usé et de 2 pavés neufs ; b) DSP des sommets et des vallées de la rugosité d'un pavé usé [PAT⁺ 05]*

Wriggers [WN07] étudia la rugosité de l'asphalte à partir des travaux de Schramm [Sch02]. Ce dernier mesura l'asphalte à l'aide d'un palpeur mécanique et d'un laser. Il trouva une dimension fractale différente entre des longueurs d'onde supérieures et inférieures à 0.05mm. Le graphique 5.2 montre alors la corrélation de hauteur en fonction de la longueur d'onde pour différents cas. On voit

clairement la différence entre un sol auto-affine analytique composé d'une seule dimension fractale et d'une longueur de coupure (en rouge) et le sol composé de plusieurs fonctions utilisant les 2 dimensions fractales (en bleu).

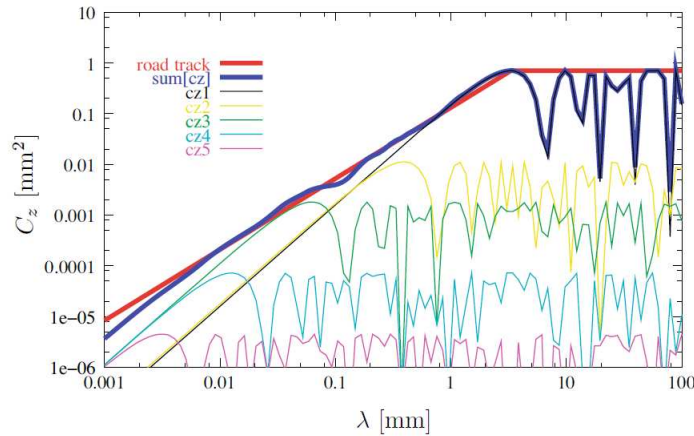


FIGURE 5.2: Fonction de corrélation de hauteur [WN07]

Le Gal et Klüppel [LGK08] ont repris ces travaux et amélioré la description des surfaces routières grâce à l'intégration de deux dimensions fractales. Les grandes longueurs d'onde présentent des propriétés morphologiques différentes de celles de la microtexture. La figure 5.3 montre des fonctions de corrélation de hauteur comprenant deux coefficients de Hurst H_1 et H_2 séparés par la longueur d'onde λ_2 . La dimension fractale de la macrotexture est de $D_{f1} = 2.44$ et celle de la microtexture de $D_{f2} = 2.08$.

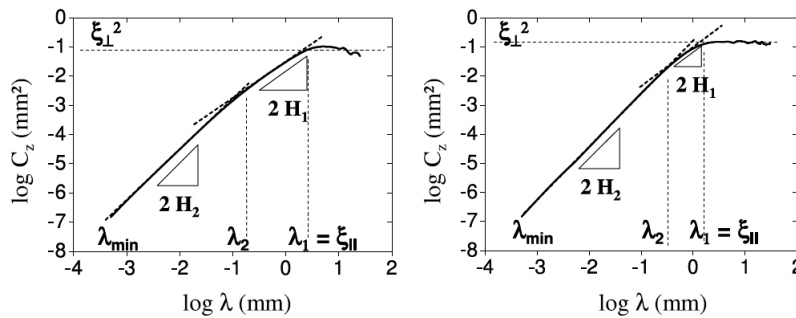


FIGURE 5.3: Fonction de corrélation de hauteur C_z en fonction de la longueur d'onde λ pour une surface en granite (gauche) et un asphalte (droite) [LGK08]

5.2.2 Phénomènes de perte d'adhérence sur sol mouillé

Grosh [Gro63] fût un des premiers à avoir relié le coefficient de frottement aux propriétés visco-élastiques de la gomme. Il voit la diminution de l'adhérence du pneumatique sur sol mouillé par l'effet de l'inertie de l'eau qui demande un certain temps pour être évacuée du contact. Ce phénomène est fortement présent à haute vitesse mais peut être obtenu lors de freinages roues bloquées à vitesses relativement faibles. Il effectua des mesures de frottement d'un pneumatique lisse bloqué sur sol mouillé, à différentes vitesses de glissement. Il montra que la diminution du coefficient de

frottement suit une loi proportionnelle à la racine carrée de la vitesse :

$$\mu = \mu_d \left[1 - \left(\frac{v}{v_{crit}} \right)^{1/2} \right] \quad (5.2)$$

où μ_d est le coefficient de frottement sur sol sec et v_{crit} la vitesse où le pneumatique est en hydroplanage.

Par la suite, il mit en évidence que la réduction du coefficient de frottement dépend du type de surface mais aussi de son usure, comme on peut le voir dans la figure 5.4. Les deux surfaces polies présentent un coefficient de frottement plus faible que leur homologue rugueux. On remarque que cette différence est beaucoup plus importante pour le verre, puisque ce dernier ne conserve presque plus de rugosités après avoir été poli.

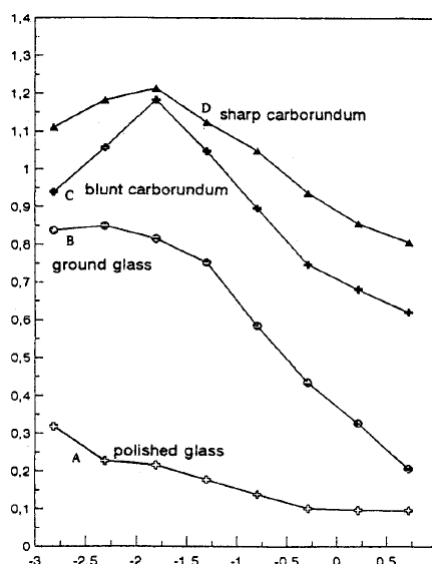


FIGURE 5.4: Coefficient de frottement en fonction du log de la vitesse de glissement en m/s pour du carbure de silicium et du verre, polis et rugueux. [Gro69]

Moore [Moo64] a établi un modèle de prédiction de la diminution du coefficient de frottement basé sur le temps mis par l'eau pour s'évacuer du contact. Il employa la théorie des fluides de Navier-Stokes. Par la suite, Rohde [Roh76] appliqua cette théorie de manière numérique. Claeys et al [CYA⁺01] ont simplifié les calculs par l'utilisation de l'équation de Reynolds pour leur intégration dans des modèles du pneumatique complet. Le modèle considère un sol lisse et une bande de roulement lisse et rigide.

La théorie repose sur la comparaison entre le temps que met l'eau pour s'évacuer du contact et le temps de contact de la bande de roulement du pneumatique. Dans le cas où ce dernier est plus important, alors la partie de la bande de roulement en contact sec est proportionnelle à la différence de ces deux temps.

Ce modèle est intéressant par sa prise en compte globale de la mécanique du fluide. Seulement, il n'est utilisable que dans la zone d'approche et de cisaillement de la bande de roulement ; il fait donc abstraction du mouvement de glissement à l'arrière du contact du pneumatique, là où la majorité de l'adhérence est créée.

Yandell et Gopalan [Yan72, YG75] proposèrent une théorie fonctionnant sur l'effacement successif des échelles du sol en fonction de l'épaisseur du film de fluide. Cette épaisseur est mesurée par un système optique sur disque en verre lisse. Cette approche ne prend donc pas en compte, d'abord, le fait que l'épaisseur de film moyenne est plus faible lorsqu'il y a une rugosité. Ensuite, elle n'introduit pas que la gomme peut se déformer, même si l'amplitude de la rugosité est inférieure à celle de l'épaisseur de film de fluide, comme le prouve la théorie de réduction d'amplitude. Les mesures effectuées par la suite par Gopalan [Gop81] permettent d'améliorer les prédictions ; elles sont effectuées sur le pneumatique d'une roue bloquée. Il trouva en accord avec d'autres expérimentations comme celles de Wallace et Trollope [WT69], des films d'eau d'une hauteur d'environ $15\mu\text{m}$ pour une vitesse de glissement de 3m/s , donnant un coefficient de frottement de 0.8 par rapport à 1 dans le cas sec.

Par la suite [TY81], Taneerananon et Yandell ajoutèrent l'effet de la diminution de l'épaisseur de fluide en fonction du nombre d'aspérités. Pour calculer cette épaisseur, l'équation de Reynolds donne le temps d'écoulement du fluide dû à la rotation du pneumatique.

Golden [Gol81] considéra deux possibilités. La première estime qu'il y a des zones de contact qui restent sèches et donc permettent de conserver l'adhérence. La seconde considère que l'adhésion provenant uniquement des petites aspérités peut être conservée même sur sol mouillé. Il montra que dans les régions en glissement de la bande de roulement, le film d'eau est présent et ne permet pas d'obtenir d'adhésion. Golden a effectué des calculs de coefficient de frottement prenant en compte l'épaisseur du film d'eau ; il montra que la diminution du coefficient de frottement n'est pas suffisante par rapport aux expérimentations. Il suggéra d'ajouter les effets élastohydrodynamiques et d'hydroplanage à son modèle. Une extension rapide de son premier travail permit de trouver des films d'eau de l'ordre de $10\mu\text{m}$ à des vitesses de glissement de 100km/h .

Persson a longtemps travaillé sur ce problème et a étudié différentes théories permettant de l'expliquer. Sa première théorie [PTAT05] explique la diminution du coefficient de frottement par le phénomène de scellage de l'eau par le pain de gomme. Le principe repose sur l'emprisonnement de l'eau dans les cavités du sol par le pain de gomme qui ne peut donc plus se déformer en suivant la forme du sol. Le principe du calcul est alors de remplir toutes les cavités possibles de la route, jusqu'à atteindre la limite du débordement. Le spectre de puissance de la rugosité du sol s'en trouve diminué de manière homogène sur toutes les longueurs d'onde, voir figure 5.5. Le calcul du coefficient de frottement sur les deux spectres de puissance du sol permet de déterminer quelle est la perte de coefficient de frottement.

Avec Carbone [CP04], Persson a montré que la mouillabilité, bien que plus difficile à atteindre avec un matériau viscoélastique mou, n'est pas présente dans la diminution du coefficient de frottement. Il montra aussi avec Lorenz [PTAT05, LP12] que la force provenant de l'évacuation de l'eau entre le pain de gomme et le sol, de part la viscosité et l'inertie de l'eau, ne pouvait pas être la cause de la diminution du coefficient de frottement, contrairement aux théories de Moore ou de la présente étude. Néanmoins, il expliqua que la présence d'impuretés et de polluants sur le sol au début de la pluie, augmente la viscosité de l'eau et peut expliquer la diminution du coefficient de frottement supplémentaire entre un sol récemment mouillé et un sol mouillé depuis plusieurs heures.

Andren et Jolkin [AJ03] ont étudié ce phénomène à partir d'un modèle de pneumatique lisse élastique, où l'eau est modélisée à partir de l'équation de Reynolds et en employant la méthode Multi-Grille de Lubrecht et Venner [VL00b]. Leurs calculs n'ont cependant pas donné lieu à une création de fluide.

Les études expérimentales de Moore [Moo75] montrèrent sur des cas de contact gomme/papier-émeri que la diminution du coefficient de frottement en lubrifié est plus importante lorsque le papier est

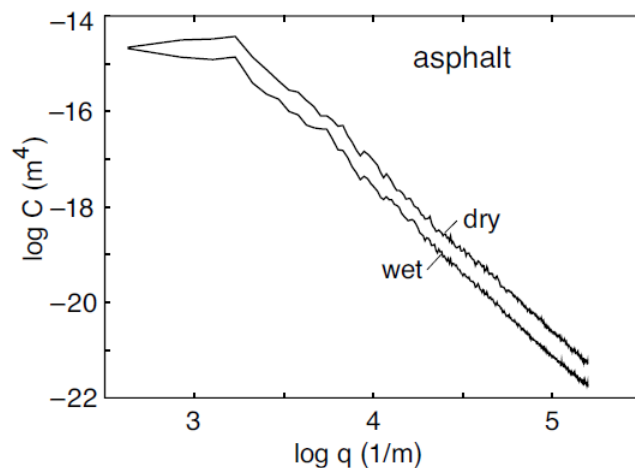


FIGURE 5.5: Spectre de puissance de hauteur de la rugosité C en fonction de la fréquence q pour un asphalte sur sol sec et sur sol mouillé. [PTAT05]

moins rugueux.

De même, les travaux de Beautru [Bea12] obtiennent les mêmes conclusions pour des sols composés de cailloux à iso-macrorugosité mais à microrugosité contrôlée.

Il est donc clair que l'amplitude du spectre de la DSP aux petites longueurs d'onde joue un rôle prépondérant dans le maintien de l'adhérence sur sol mouillé. Ces études valident le fondement de la théorie employée dans cette étude.

5.2.3 Méthodes de calcul du coefficient de frottement

Les diverses études de la littérature se placent dans le cas où un film d'eau est toujours interposé entre le pain de gomme et le sol. De ce fait, le phénomène d'adhésion est annulé ; il ne reste donc plus que le frottement hystérétique, provenant de la déformation de la gomme, montré par Savkoor et Grosh [Sav65, Gro63].

En approche numérique, la méthode des éléments finis est la méthode la plus facile à mettre en place. Cependant, pour étudier le frottement sur un sol modélisé par une surface, il faut modéliser le pain de gomme par des éléments en 3D. La rugosité demandant une discrétisation importante, les calculs sont lourds en terme d'espace mémoire et de temps de calcul. Palfi et al [PBGV08, PGV11] utilisèrent des éléments en 2D en contact avec un profil composé de plusieurs échelles de rugosité.

Yandell [Yan68] a utilisé des éléments mécano-lattice en 2D, employant des nœuds comme des éléments finis, mais dont les raideurs en compression, traction et cisaillement sont définies par des systèmes ressort-patin de Coulomb. Le coefficient de frottement est calculé en faisant le rapport entre la somme des forces tangentielles et les forces normales présentes sur la zone de contact du système.

Johnson [JGH85] a étudié le problème de contact viscoélastique analytiquement de manière asymptotique à partir des équations de Westergaard. Par la suite, il a développé une résolution numérique à partir de la transformée de Fourier des champs de déplacement et de pression. Il arriva à déterminer les limites entre les zones en contact et en non-contact. Il parvint à montrer que la saturation de l'aire de contact fait diminuer le coefficient de frottement.

Pour l'approche analytique, une grande partie de la littérature utilise l'énergie dissipée dans le matériau viscoélastique pour calculer le coefficient de frottement hystérétique. Cette énergie est exprimée comme étant la somme du produit de la contrainte de cisaillement par la déformation. La relation existant entre la contrainte et la déformation permet de remplacer la contrainte par le module viscoélastique du matériau.

Le modèle de Heinrich et Kluppel [HK00], visible dans l'équation 5.3, repose sur la déformation normale subie par la gomme à cause des rugosités du sol. Il n'y a pas de couplage dans la dimension du plan provenant du coefficient de Poisson. La dissipation provient de la densité spectrale de puissance du sol $S(\omega)$. Par la suite, Le Gal [LGYK05] scinda le spectre de rugosité du sol en deux parties. La première, composée de macrorugosités ayant des amplitudes supérieures à $200\mu m$, crée l'adhérence pour les fortes vitesses de glissement et la seconde, composée par les microrugosités avec des amplitudes comprises entre 5 et $100\mu m$, apporte l'adhérence aux faibles vitesses de glissement.

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\langle \delta \rangle}{\sigma_0 v} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega \omega G''(\omega) S(\omega) \quad (5.3)$$

Ces divers modèles ne prennent en compte qu'une interaction verticale provenant du sol. Or des interactions de volumes sont en réalité présentes et peuvent augmenter le coefficient de frottement. Le premier modèle incluant ces interactions fut celui de Schapery [Sch78] qui décrit la déformation d'un massif semi-infini viscoélastique u_s par une sinusoïde. Le contact est total et le coefficient de frottement ne dépend que du rapport entre l'amplitude et la longueur d'onde de la sinusoïde. Il appliqua par transformée de Fourier un ensemble de sinusoïdes qui lui permit de décrire une surface rugueuse. Il en déduisit ainsi la force s'opposant au déplacement 5.4 :

$$F_D = \frac{16\pi^2}{3} \int_0^\infty f^2 |\bar{u}_s|^2 E'' df \quad (5.4)$$

Golden [Gol80] a montré que le facteur d'échelle du sol n'entre pas en ligne de compte dans le coefficient de frottement. En effet, la déformation due à une petite aspérité est plus faible que pour celle d'une grande aspérité ; le coefficient de frottement est donc plus important pour la grande aspérité. Mais le nombre d'aspérités augmente lorsque l'on décroît dans les échelles, ce qui compense la diminution de la taille des aspérités. L'effet d'échelle est donc inexistant. Golden a alors généralisé le modèle de Schapery aux surfaces par l'introduction de la densité spectrale de puissance $\psi(k)$:

$$f_H = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 l (1 - \nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} G''(v k_x) \psi(k) k_y k_y d^2k \quad (5.5)$$

Persson [Per01] a montré que le taux de contact, dans un contact multi-échelles, a tendance à diminuer lorsque l'on va vers de petites échelles, notamment dans les cavités des grandes échelles. Il introduisit un taux de contact $P(\zeta)$ qui dépend du facteur d'échelle ζ . Il reprit la théorie de Golden à laquelle il ajouta ce taux de contact :

$$\mu = \frac{1}{2} \int q^2 \cos\phi C(q) P(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos\phi)}{(1 - \nu^2)\sigma_0} d^2q \quad (5.6)$$

5.3 Étude du contact gomme-sol routier

Cette section propose une compréhension du contact gomme-sol routier sec à l'échelle microscopique. D'abord, une étude de deux types de surfaces est présentée. Ensuite, l'étude du contact gomme-sol routier est exploitée.

5.3.1 Mesure du sol routier

Afin d'améliorer la compréhension du contact gomme-sol routier, de nombreuses mesures ont été effectuées. Celles-ci utilisent deux types de surfaces : quatre échantillons de cailloux neufs juste avant le mélange avec le bitume ; quatre autres sur un caillou fortement usé.

Les mesures sont effectuées à l'aide d'un microscope optique de type confocal. Chaque surface est obtenue par 4 mesures jointes, avec un grossissement de 20. Les surfaces sont rectangulaires de dimensions $1.208 \times 0.907 \text{ mm}$, avec un pas de mesure de $0.83 \mu\text{m}$, donnant ainsi un nombre de points de près de $1.6 \cdot 10^6$.

Les figures 5.6 et 5.7 montrent la surface en 3D d'un des cailloux neuf 1-2 et d'un échantillon du caillou usé 3-2. La comparaison des deux échelles montre la différence de rugosité entre ces deux surfaces.

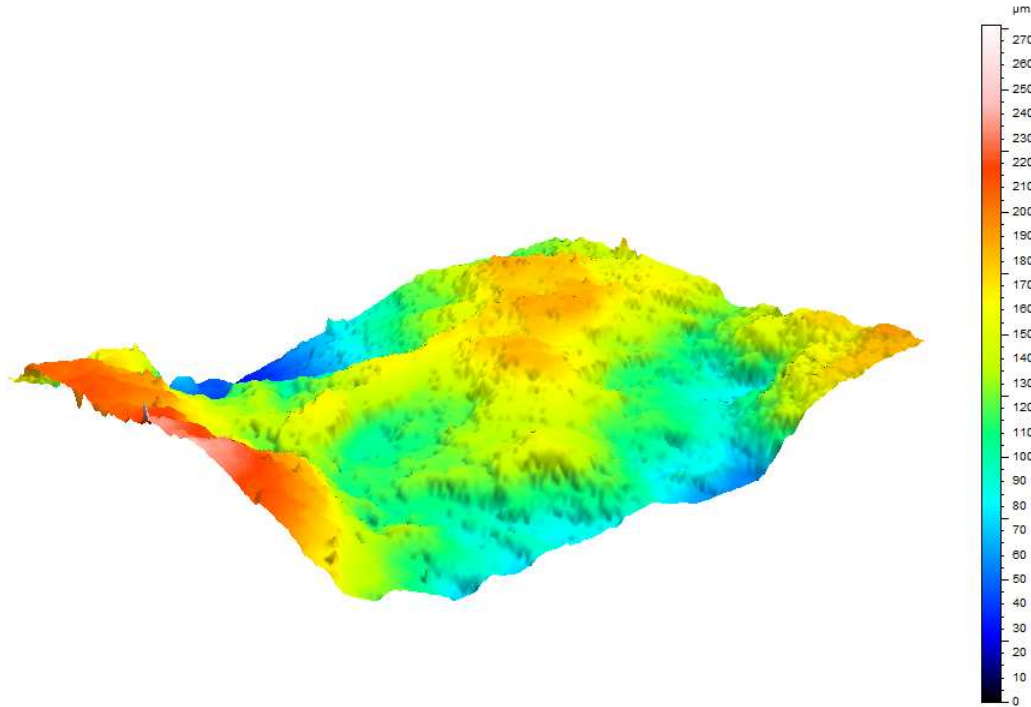


FIGURE 5.6: *Echantillon de surface neuve 1-2*

Les surfaces sont étudiées à partir de la Densité Spectrale de Puissance (DSP), introduite en tribologie par Whitehouse et Archard [WA70]. D'après le théorème de Wiener Khintchine, elle est la transformée de Fourier de l'autocorrélation qui permet de décrire la redondance de chaque longueur d'onde. Ainsi, on peut connaître l'importance de chacune des longueurs d'onde dans le spectre de la surface. La DSP est plus généralement calculée à partir du carré de l'amplitude de la transformée de Fourier de la surface :

$$DSP(u, v) = \frac{1}{ab} \left| \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} h(x, y) e^{-2\pi j(ux+vy)} dx dy \right|^2 \quad (5.7)$$

où h est la hauteur de la surface et a et b ses dimensions.

On obtient alors le spectre en 2D de la variance de chaque longueur d'onde dans les deux directions. Sa représentation en 1D peut être effectuée selon 3 méthodes [Sid09]. La première consiste à prendre

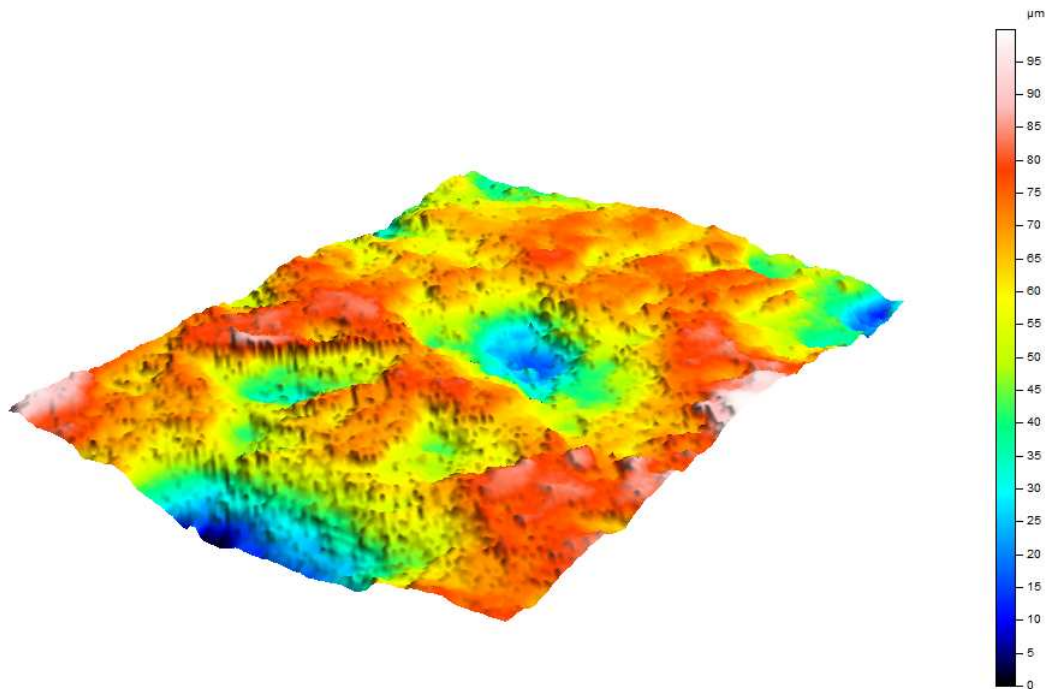


FIGURE 5.7: *Echantillon de surface usée 3-2*

une tranche selon une direction et la seconde à effectuer une moyenne selon une des deux directions. Enfin, la troisième est un calcul azimuthal, c-à-d que l'on effectue une moyenne de la DSP pour chaque rayon de cercle centré au centre de la surface.

La figure 5.8 compare les calculs de DSP azimuthal " $DSP\ 1-2\ az$ " et moyenné suivant X " $DSP\ 1-2\ mx$ " pour le sol 1-2 à deux asphaltes mesurés par Klüppel et al [LGYK05, HK08] " $DSP\ K$ " dont les dimensions fractales sont de 2.35 et 2.08. La DSP est représentée en fonction du vecteur d'onde $q = 2\pi/\lambda$.

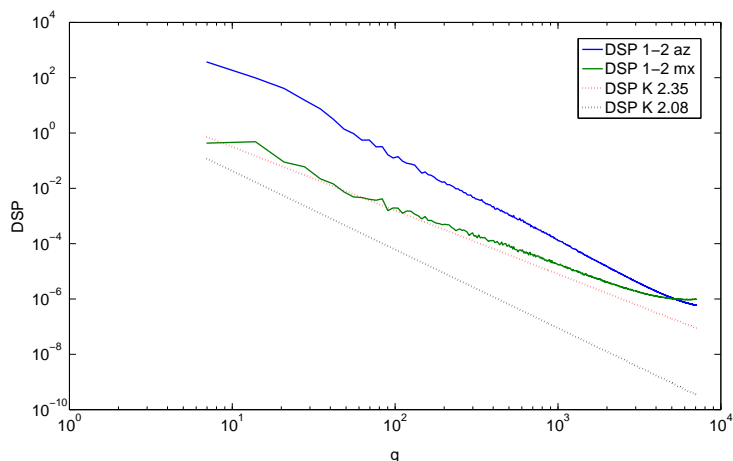


FIGURE 5.8: $DSP\ (mm^4)$ en fonction de la pulsation $q\ (mm^{-1})$ du sol 1-2 et de 2 surfaces de Klüppel et al

On remarque que les résultats des deux types de calcul de la DSP pour une même surface donnent des résultats assez différents. Klüppel n'indique pas quel type de calcul il effectue contrairement

à Persson qui semble utiliser la procédure azimutale [PTAT05]. Ils décrivent la pente de la DSP différemment, avec $2D_f - 7$ pour Klüppel et $2D_f - 8$ pour Persson. Le calcul de la dimension fractale du sol 1-2 selon Klüppel donne 2.488 pour la procédure de moyenne suivant X et 2.025 pour la procédure azimutale ; alors que selon Persson, on trouve respectivement 2.988 et 2.525. Cela semble montrer que Klüppel suit une procédure de moyenne suivant X puisque l'on retrouve des dimensions fractales très proches lorsque la méthode de calcul de la DSP correspond à la pente de la courbe. Il a été choisi d'utiliser la méthode de calcul du coefficient de frottement de Heinrich et Klüppel, c'est donc la méthode de moyenne suivant une direction qui sera retenue pour le calcul de la DSP.

La DSP est appliquée sur chaque surface pour comparer leurs caractéristiques. La figure 5.9 montre quatre échantillons du sol neuf référencés sous la forme "H 1 - x " et quatre du sol usé par "H 3 - x ".

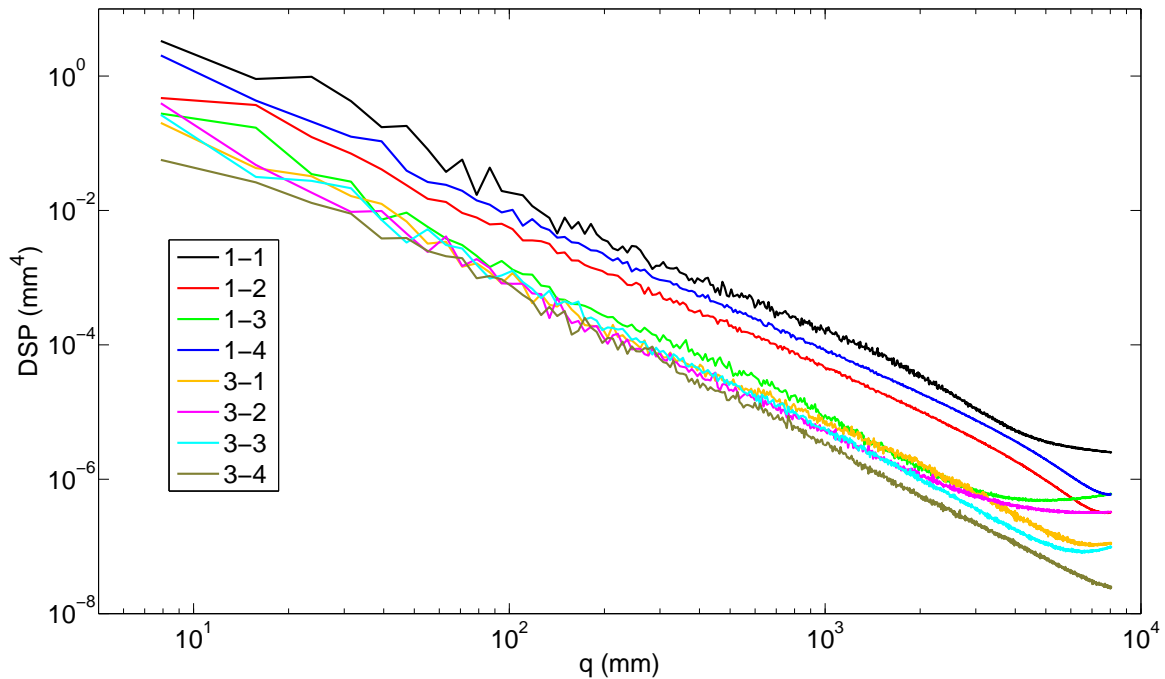


FIGURE 5.9: $DSP (mm^4)$ en fonction du vecteur d'onde $q (mm^{-1})$ des 8 échantillons du sol

Une disparité relativement importante est visible dans les propriétés des sols neufs en comparaison avec les sols usés. Néanmoins, la pente des différents échantillons reste très proche hors de la zone des très petites longueurs d'onde. La même constatation que Wriggers peut être effectuée puisqu'aucun échantillon ne suit strictement une loi auto-affine. Les mesures s'étant focalisées sur la surface des cailloux, elles ne peuvent donc pas prendre en compte la zone d'amplitude constante du spectre, située dans les grandes longueurs d'onde.

On retrouve des résultats proches de ceux obtenus par Persson [PAT⁺05] qui trouve une DSP plus faible, principalement sur les grandes longueurs d'onde entre un pavé usé et un pavé neuf. Nos mesures montrent que la diminution de la DSP est valable également pour les petites longueurs d'onde.

La table 5.2 décrit deux caractéristiques pour chaque surface. La dimension fractale est calculée suivant la méthode des boîtes englobantes et selon la pente de la DSP. Puis, la moyenne quadratique de la rugosité σ_{RMS} est calculée à partir de la DSP.

Les résultats des deux types de dimension fractale diffèrent car la dimension fractale de la DSP a été extraite sur la zone d'étude réaliste, c-à-d sur la plage allant des moyennes aux petites longueurs d'onde, ce qui explique que la pente soit plus faible. Néanmoins, les deux valeurs suivent les mêmes tendances et respectent les valeurs trouvées dans l'ensemble de la littérature.

<i>échantillon</i>	<i>D_f boîtes englobantes</i>	<i>D_f DSP</i>	<i>σ_{RMS} (mm)</i>
1 – 1	2.17	2.36	0.086
1 – 2	2.2	2.49	0.0364
1 – 3	2.25	2.46	0.0397
1 – 4	2.19	2.4	0.134
3 – 1	2.31	2.44	0.0139
3 – 2	2.31	2.43	0.0102
3 – 3	2.31	2.31	0.008
3 – 4	2.4	2.41	0.014

TABLE 5.2: *Caractéristiques des 8 échantillons mesurés.*

Deux exemples de comparaison d'isotropie des surfaces sont montrés dans la figure 5.10 pour les échantillons 1 – 2 du sol neuf et 3 – 3 du sol usé. Toutes les surfaces présentent des comportements très proches suivant les directions X et Y . L'hypothèse d'isotropie des surfaces est validée.

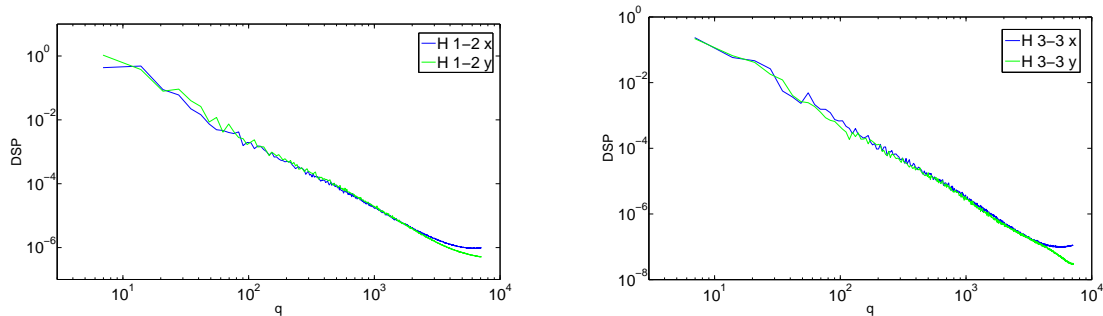


FIGURE 5.10: DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour a) sol neuf 1 – 2 et b) sol usé 3 – 3.

La figure 5.11 compare la DSP de 2 échantillons du sol avec celle du sol discret de Yandell tiré de la table 5.1 et celles des sols auto-affines de Le Gal, Heinrich et Klüppel [HK08, LGK08] ayant une dimension fractale de D_f de 2.35 et 2.08. Les données de la littérature sont très proches de celles obtenues par les mesures de cette étude. La vision sous forme discrète du sol de Yandell présente une tendance linéaire se poursuivant jusqu'aux sommets des cailloux.

Cette partie permet de conclure que l'approximation auto-affine est relativement bonne pour un sol routier. Il est toutefois intéressant de conserver le spectre réel ainsi que la différenciation entre des sols neufs et usés pour comparer l'impact de la lubrification sur le coefficient de frottement de chacun de ces sols.

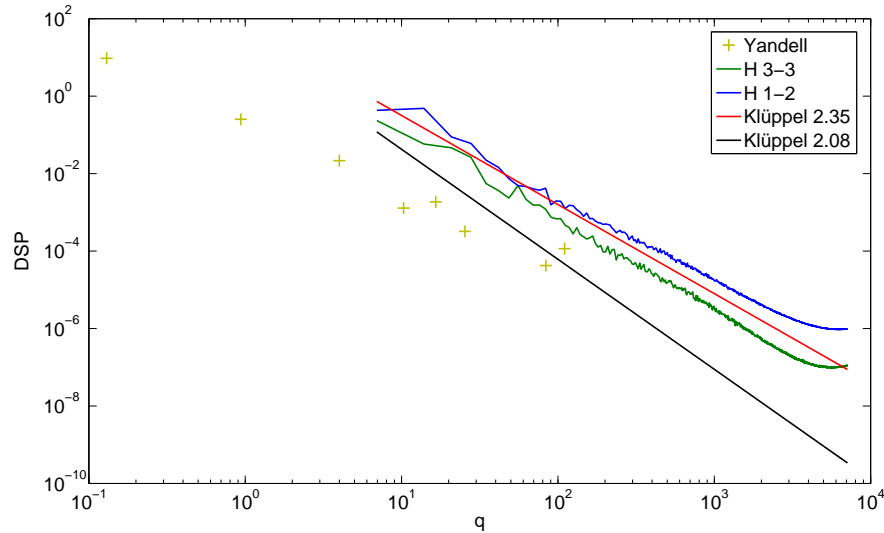


FIGURE 5.11: DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) de 4 échantillons des sols, du sol discret de Yandell et du sol auto-affine de Klüppel

5.3.2 Étude numérique du contact

Afin d'améliorer la compréhension du contact réel, les problèmes de contact sec élastique et visco-élastique sont étudiés. Il est connu que le contact n'est pas complet, c-à-d que la gomme ne remplit pas toutes les cavités du sol. L'étude va donc porter sur les propriétés du contact du pain de gomme sur le sol.

Cas élastique

Le code de calcul sec utilisant la méthode MultiGrille est appliqué, ses équations reposent sur les théories expliquées dans le chapitre 2. Le cas d'étude est celui d'une sphère élastique en contact avec la surface mesurée. Afin d'évaluer le contact sur une plage de fonctionnement, la charge est modifiée suivant une certaine plage. Les conditions de contact sont choisies pour être relativement proches du cas de contact d'un pain de gomme sur un caillou.

La pression de gonflage du pneumatique d'un véhicule de tourisme est d'environ $0.2MPa$; compte tenu du taux d'entaillage de la bande de roulement, la pression moyenne est d'environ $0.3MPa$. Sur les échantillons utilisés dont l'aire est de $0.81 mm^2$, la charge portée serait entre $1.2N$ et $4.86N$ pour des taux de contact sur le sommet des rugosités compris entre 20% et 5%. Le rayon de contact des échantillons est d'environ $6mm$. Le module élastique E est calculé comme étant l'amplitude du module d'un matériau viscoélastique représentatif de celui employé dans l'industrie; ses caractéristiques sont reprises de Le Gal et al [LGYK05]. Le module est obtenu à la fréquence d'excitation minimale du pain de gomme. On se place dans les conditions favorables au contact, c-à-d avec un taux de contact de 5%.

Le nombre de points employé dans le calcul est de 2048^2 sur un patch carré de $0.907^2 mm$. Le nombre de points étant supérieur à celui des mesures des sols, une interpolation de la hauteur de la surface mesurée s'avère nécessaire.

La figure 5.12 compare la DSP du sol avec la DSP de la déformation de la sphère. On remarque que le spectre est diminué d'un facteur allant de 70 pour le sol 3 – 1 jusqu'à plus de 100 pour le sol

module E	521 MPa	coefficient de Poisson ν	0.5
rayon de courbure R_x	6 mm	charge w	5 N
rayon de contact a	0.319 mm	enfoncement δ	0.0169 mm
pression d'Hertz p_H	23.5 MPa	pression moyenne p_{moy}	6.17 MPa

TABLE 5.3: Paramètres de contact pour les calculs.

1 – 1, sur toutes les longueurs d'onde. De plus, la DSP de la déformation du pain de gomme montre une tendance commune pour les longueurs d'onde inférieures à $5\mu m$. L'ordre de l'amplitude de la DSP a changé pour certains sols.

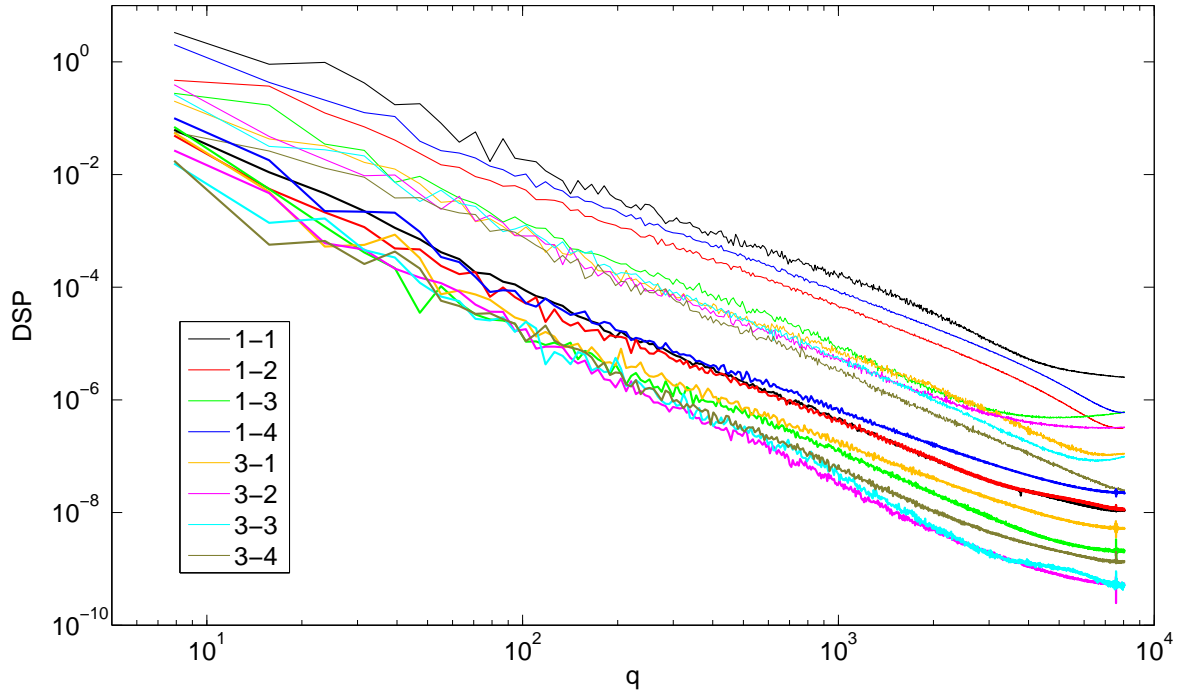


FIGURE 5.12: DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) : trait fin pour le sol et trait épais pour la déformation

La figure 5.13 montre le rapport entre la DSP de la déformation du pain de gomme et celle du sol. On remarque que la zone des longueurs d'onde moyennes est celle qui est le moins bien conservée. La forme de la DSP pour les petites longueurs d'onde est beaucoup plus homogène pour la déformation. Certains sols comme les sols 1-1, 1-3 et 3-2, présentent une diminution plus forte de leur DSP pour les très petites longueurs d'onde ; ils ont donc tendance à mieux conserver ces dernières. Dans le cas contraire, les sols 1-2, 1-4, 3-1 et 3-4 perdent davantage les petites longueurs d'onde. Cela montre que le contact tend à homogénéiser le rapport entre les échelles, avec une prédominance relative des petites échelles. Il reste difficile d'émettre une tendance générale pour le reste des résultats. Il est de même difficile de trouver une relation entre cette tendance et les paramètres statistiques.

Les figures 5.14 et 5.15 montrent les champs de pression pour le sol neuf 1-2 et le sol usé 3-4. Il est facilement visible que le sol usé a un taux de contact plus important que le sol neuf. Cela est validé par le calcul du taux de contact, voir figure 5.16.

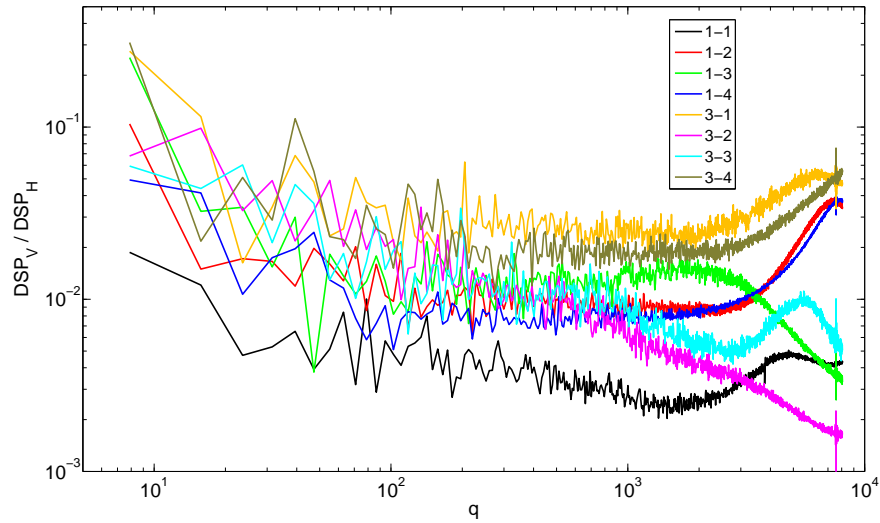


FIGURE 5.13: Rapport entre la DSP de la déformation de la gomme et celle du sol en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1})

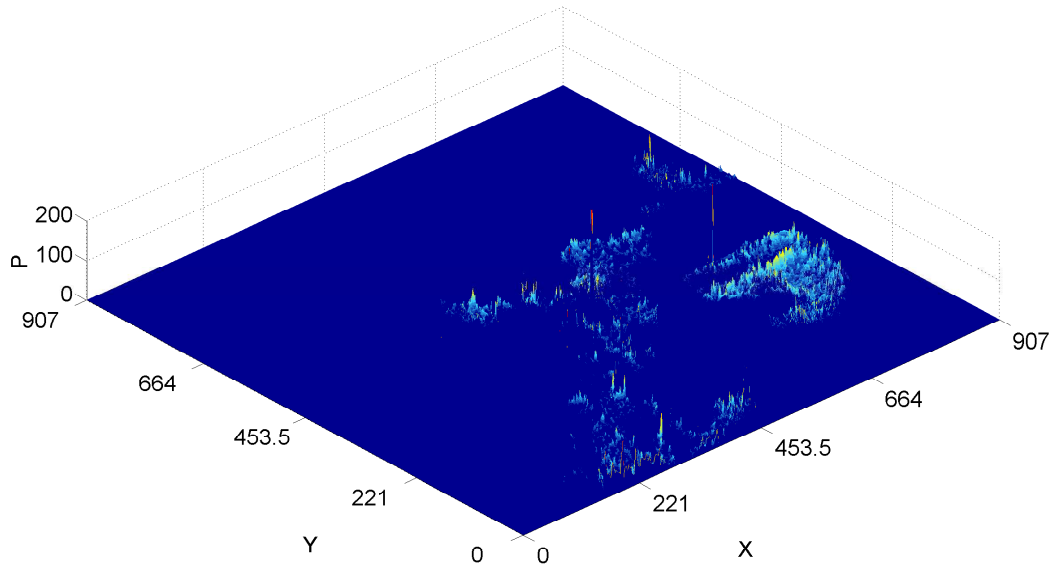


FIGURE 5.14: Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol neuf 1-2

La figure 5.16 montre le taux de contact en fonction de la charge. Les valeurs sont proches de celles trouvées dans la littérature, notamment de Persson [PAT⁺05]. On remarque qu'en moyenne, les surfaces ayant la rugosité σ_{RMS} la plus importante, comme la surface 1-1 neuve, sont celles qui ont le taux de contact le plus faible à charge donnée. Cependant, les écarts de σ_{RMS} ne sont pas représentatifs de ce que l'on observe. Par contre, si l'on calcule σ_{RMS} et la dimension fractale pour la déformation de la gomme, les résultats sont beaucoup plus compréhensibles comme le montre la table 5.4. σ_{RMS} présente une excellente corrélation alors que la dimension fractale ne permet d'établir aucune relation avec le taux de contact.

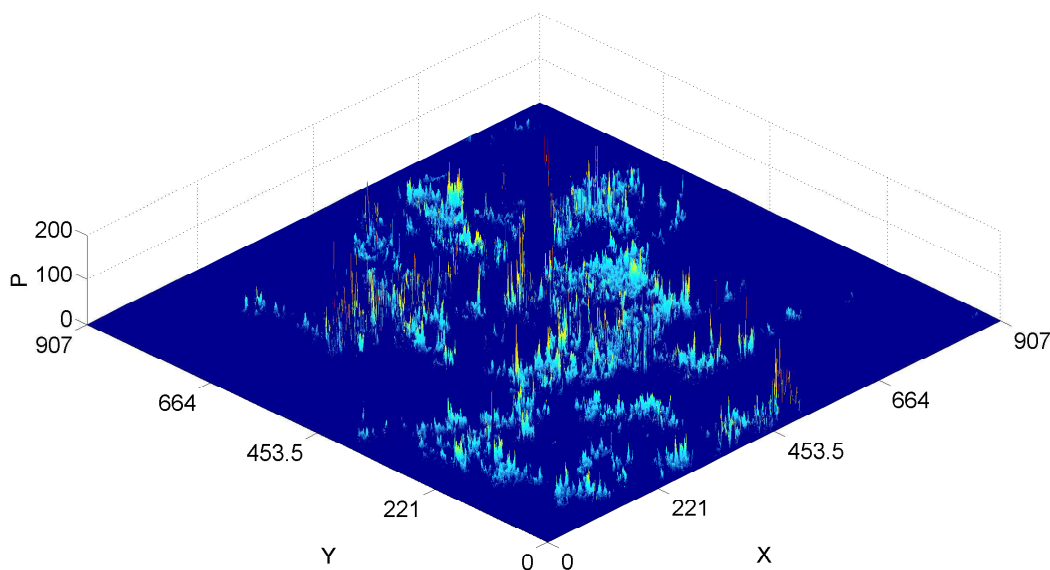


FIGURE 5.15: *Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol usé 3-4*

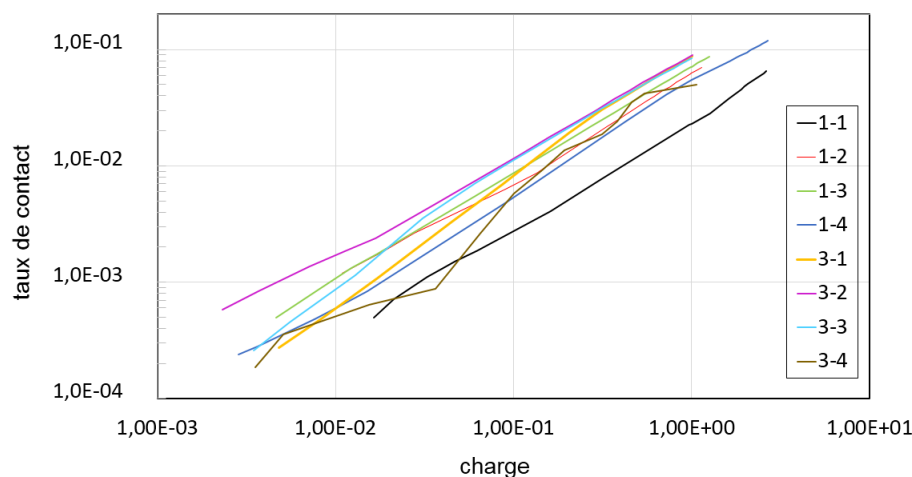


FIGURE 5.16: *Taux de contact en fonction de la charge (N) pour les 8 échantillons de sol*

La figure 5.17 montre la raideur du contact en fonction de la charge. On remarque que ce sont les surfaces ayant la plus importante σ_{RMS} qui ont la raideur la plus faible. On peut en déduire que c'est l'amplitude de la rugosité dans la plage de longueur d'onde de 10^1 jusqu'à 10^2 mm qui pilote la raideur du contact. On observe que les sols ayant la plus importante dimension fractale, calculée par boîtes englobantes, ont aussi la plus grande raideur du contact.

Ces résultats diffèrent en partie de ceux obtenus par Buzio et al [BBB⁺03]. Pour des surfaces auto-affines composées de nanocarbone structuré et de sexithienyle, ils ont montré expérimentalement que la raideur du contact était inversement proportionnelle à la dimension fractale et au paramètre de rugosité σ_{RMS} . Cette étude montre bien les mêmes tendances pour la rugosité σ_{RMS} , mais montre l'opposé pour la dimension fractale. Le très faible taux de contact en est très probablement l'explication.

<i>échantillon</i>	$D_f \text{ DSP}$	$\sigma_{RMS} \text{ (mm)}$
1 – 1	2.41	0.0062
1 – 2	2.47	0.0058
1 – 3	2.31	0.0051
1 – 4	2.47	0.0081
3 – 1	2.44	0.0045
3 – 2	2.32	0.0015
3 – 3	2.12	0.0029
3 – 4	2.35	0.0025

TABLE 5.4: *Caractéristiques des 8 déformations calculées.*

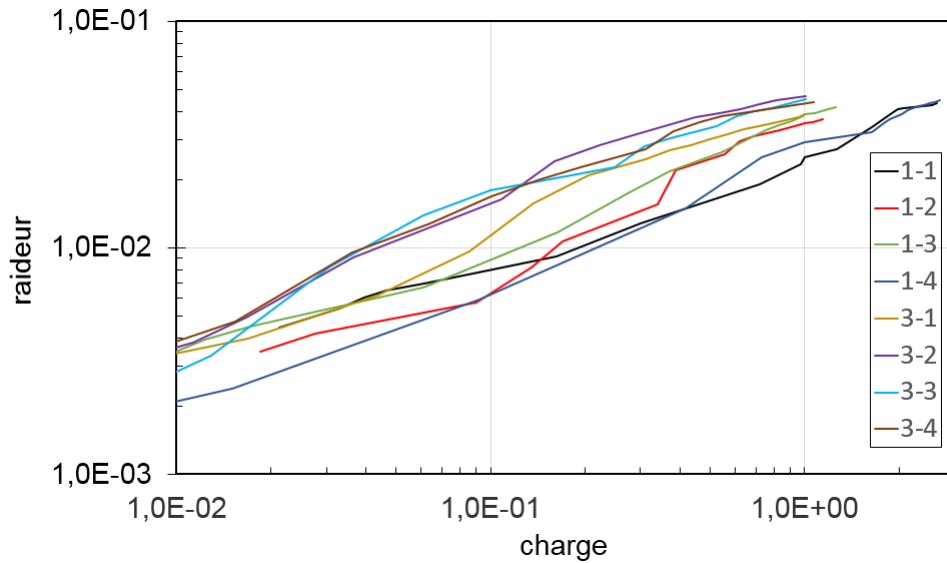


FIGURE 5.17: *Raideur ($N/\mu m$) de contact en fonction de la charge (N) pour les 8 échantillons de sol*

Ces deux études montrent que plus une surface est rugueuse, plus son taux de contact est faible à charge donnée et moins le contact est raide. Cela indique qu'une surface rugueuse aura moins de points en contact et aura donc des champs de pression plus élevés, ce qui est plus propice à casser le film d'eau. De plus, ayant une raideur plus faible, un soulèvement partiel de la gomme par un effet de lubrification engendrera moins de perte du coefficient de frottement.

La figure 5.18 montre la distribution de hauteur des 8 échantillons du sol. On remarque que la répartition de la distribution suit relativement bien les valeurs de σ_{RMS} .

La figure 5.19 montre la distribution de hauteur du sol 1-1 "H1 – 1" et celle qui est en contact avec la gomme "R1 – 1" pour une charge d'1N. On remarque que la distribution des sommets en contact suit celle du sol uniquement sur les hauteurs les plus élevées. Tous les sols suivent la même tendance. Ce résultat est très proche de celui obtenu par Le Gal et al [LGK08]. Pour améliorer la prédiction de la distribution des hauteurs dans le calcul du coefficient de frottement d'Heinrich, voir équation 5.3, ils ont établi un coefficient de décalage de la distribution de hauteur du sol afin de trouver la distribution de la déformation de la gomme.

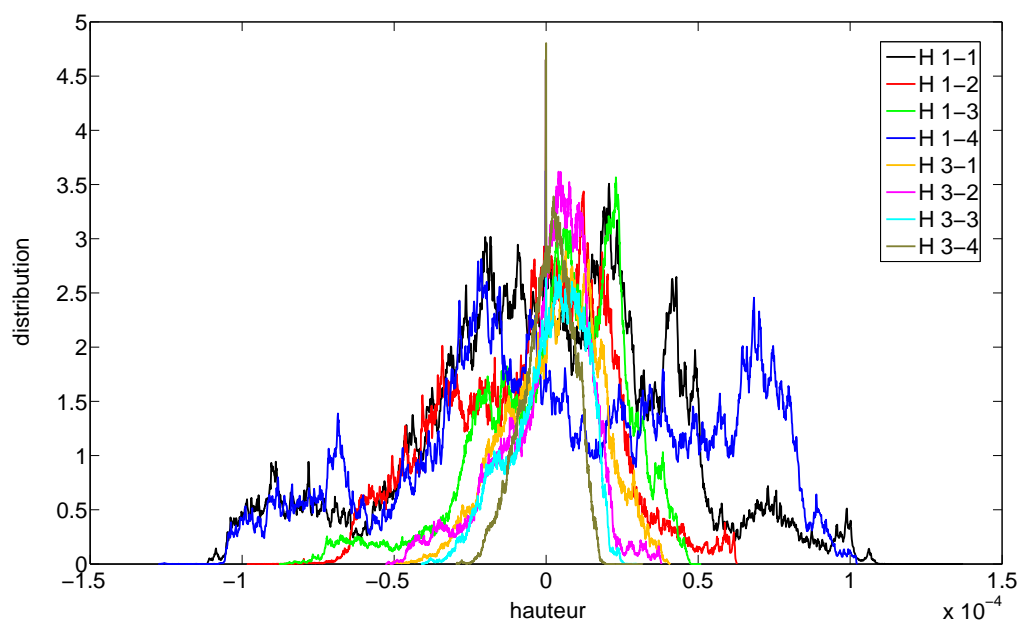


FIGURE 5.18: *Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) des 8 échantillons du sol*

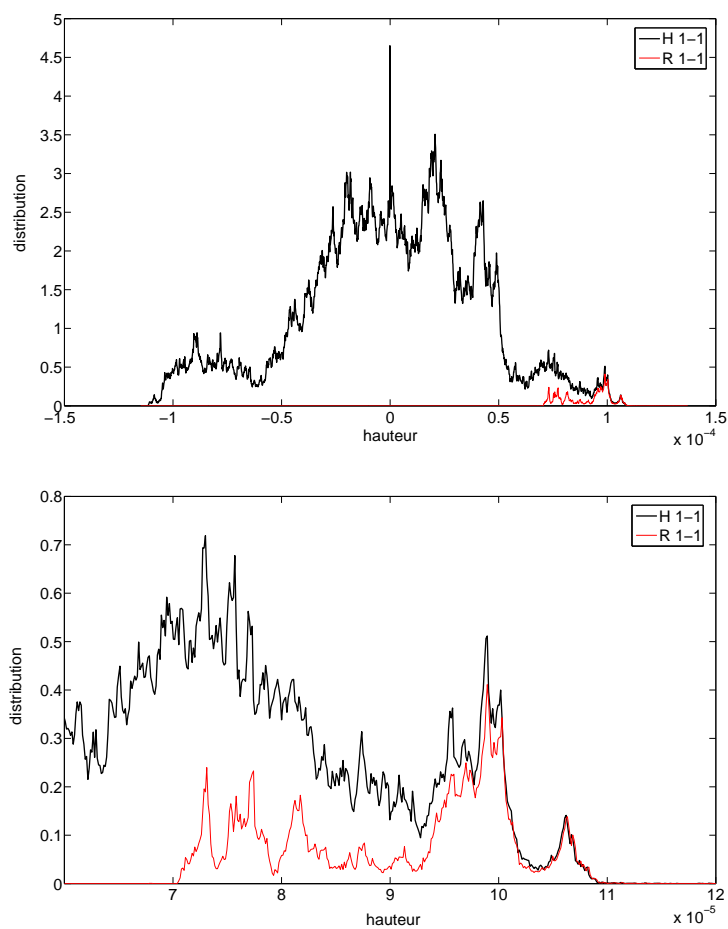


FIGURE 5.19: *Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) du sol 1-1 et des sommets en contact*

Cas viscoélastique

Afin de disposer de données plus réalistes pour le calcul du coefficient de frottement sur sol mouillé, la même étude a été effectuée avec un matériau viscoélastique.

Le matériau choisi est du styrène-butadiène (S-SBR) renforcé de noir de carbone (N339), dont les propriétés sont reprises de l'étude de Le Gal et al [LGYK05]. Les données sont corrélées par rapport à un modèle de Zener à 14 branches et sont montrées dans la table 5.5. Ce matériau est un des constituants courants de la bande de roulement des pneumatiques.

$G_0 = 1800 \text{ (MPa)}$	$f = 99$
$G_\infty = 18 \text{ (MPa)}$	$\nu = 0.5$

$\tau_i \text{ (s)}$	K_i
1.10^{-14}	0.01
1.10^{-12}	0.051
1.10^{-10}	0.12
1.10^{-9}	0.1
1.10^{-8}	0.2
1.10^{-7}	0.2
1.10^{-6}	0.2
1.10^{-5}	0.07
1.10^{-4}	0.03
3.10^{-3}	0.002
1.10^{-3}	0.006
1.10^{-2}	0.004
1.10^{-1}	0.004
1.0	0.003

TABLE 5.5: *Caractéristiques du S-SBR renforcé de noir de carbone à 0.5% d'élongation à 21°C [LGYK05].*

Les conditions de contact restent les mêmes que dans l'étude précédente 5.3.2, excepté la vitesse de glissement qui doit être prise en compte ici. Elle est choisie à $0.1m/s$.

La méthode de calcul utilisée est celle en régime permanent par FFT, présentée dans le chapitre 2. Compte-tenu du temps de glissement d'un pain de gomme, cette hypothèse est réaliste dans la représentation des temps de relaxation prépondérants qui sont inférieurs à $10^{-4}s$.

La figure 5.20 compare la DSP de la déformation de la gomme du cas élastique de l'étude section 5.3.2 à celle du cas viscoélastique pour chaque surface.

Le cas viscoélastique présente une déformation plus faible à cause de la rigidité supérieure engendrée par l'excitation du matériau viscoélastique. On peut en déduire que le module d'Young du cas élastique est inférieur au module viscoélastique "moyen" employé dans ce dernier cas. Son taux de contact est aussi plus faible.

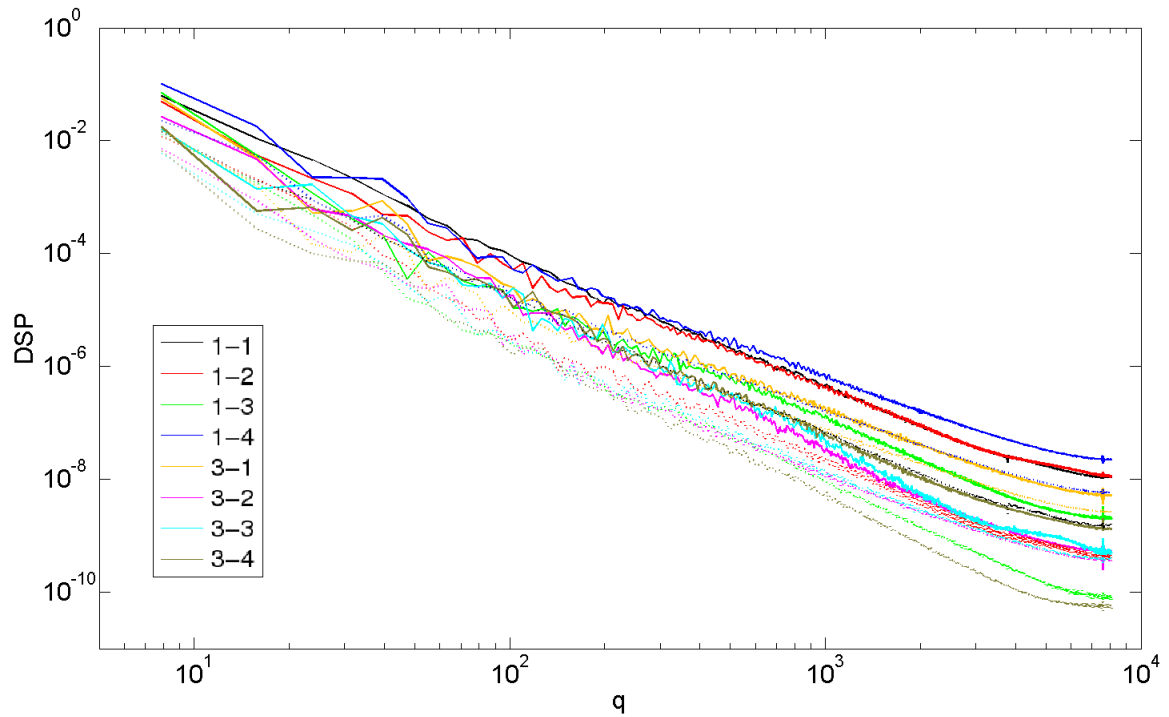


FIGURE 5.20: DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) : trait continu pour le cas élastique et tiret pour le cas viscoélastique

L'impact de la vitesse de glissement est montré dans la distribution de hauteur sur la figure 5.21. Comme le suggère sa DSP, la distribution des cas viscoélastiques R_{ve} est bien plus faible que celle du cas élastique R_e .

De plus, dans le cas viscoélastique, lorsque la vitesse de glissement V_g augmente, le matériau devient plus rigide, ce qui réduit son enfoncement et ainsi sa répartition de la distribution des hauteurs. Cet effet est visible entre les deux cas viscoélastiques aux vitesses V_g de $0.1m/s$ et $10m/s$.

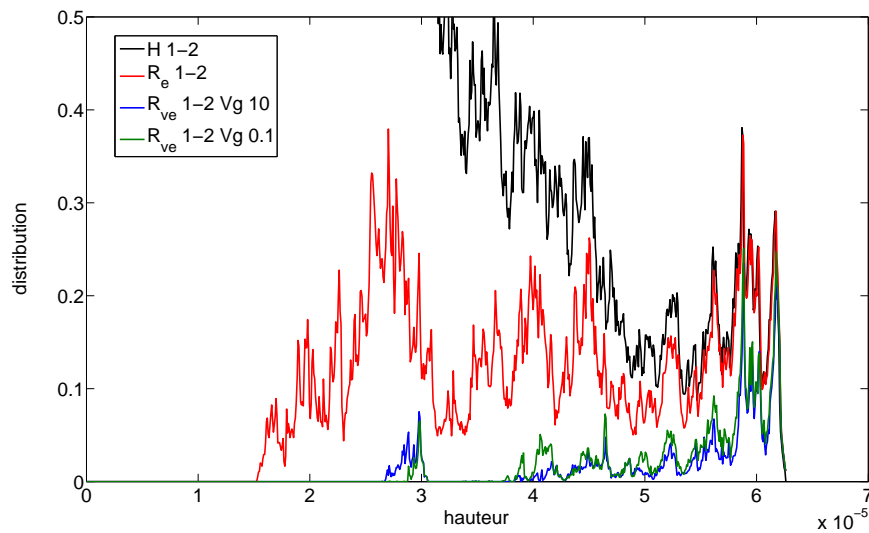


FIGURE 5.21: Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) pour le sol 1-2 : comparaison d'un contact élastique à deux cas viscoélastiques

Cette section a montré que l'hypothèse d'un contact complet est invalide. L'utilisation du spectre des sommets en contact avec la gomme est donc fortement conseillée lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes s'appliquant au pain de gomme.

L'étude de contact a montré que les surfaces avec la rugosité σ_{RMS} la plus importante sont les moins disposées à avoir une perte du coefficient de frottement par effet de lubrification.

Enfin, le calcul viscoélastique montre que la déformation est dépendante de la vitesse de glissement. Cette méthode peut ainsi être utilisée après filtration du sol par la TRA pour calculer la diminution du coefficient de frottement.

5.4 Diminution de l'adhérence sur sol mouillé par la théorie de réduction d'amplitude

5.4.1 Hypothèses

La diminution de l'adhérence sur sol mouillé va être étudiée à partir de la théorie de réduction d'amplitude (TRA).

Les hypothèses de la TRA, telle qu'elle a été étudiée dans le chapitre précédent, sont d'avoir :

- un matériau élastique ;
- un fluide isovisqueux ;
- une amplitude de rugosité inférieure à 10% de la hauteur du film de fluide en contact lisse ;
- une surface isotropique ;
- un contact en roulement pur ;
- un contact continu.

Certaines hypothèses vont évidemment affecter la précision des résultats.

• La première hypothèse importante est la non prise en compte de la viscoélasticité. Il a été montré au chapitre 3 que la viscoélasticité pouvait modifier fortement le comportement du contact. L'épaisseur du film varie en fonction du temps, de l'espace et suivant la fréquence d'excitation du matériau. De plus, la viscoélasticité crée un comportement asymétrique où l'entrée du contact présente une pression plus importante qu'à la sortie. Plus la viscoélasticité est importante, plus la différence avec le cas élastique va être conséquente. Néanmoins, le matériau du pain de gomme fonctionne avec une plage de temps de relaxation très importante. La dissymétrie de la pression devrait rester relativement faible.

La figure 5.22 montre la différence relative de l'épaisseur de film minimale et au centre du contact entre des contacts lubrifiés EHD et VEHD en régime permanent. Le cas d'étude est celui d'une sphère en glissement sur un massif semi-infini viscoélastique lisse. Le matériau a un rapport de viscoélasticité $f + 1$ de 20 dont le temps de relaxation τ varie. Le paramètre de charge de Moes M est de 277, 685 et 1000. On remarque que la différence est maximale lorsque le coefficient de frottement est maximum et minimale pour les petits temps de relaxation, là où le matériau se rapproche du cas élastique. Lorsque le temps de relaxation augmente, la différence atteint une asymptote puisque le matériau va atteindre son plateau vitreux.

On comprend donc que c'est l'importance de la dissymétrie et du rapport $f + 1$ qui donnera la fidélité du modèle.

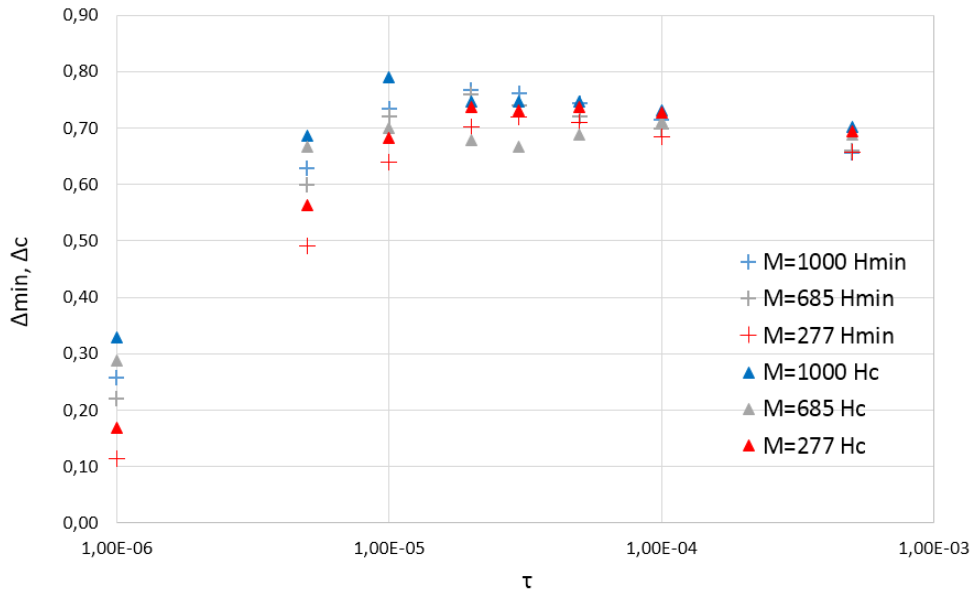


FIGURE 5.22: Différence relative de la hauteur de film minimale H_{min} et au centre du contact H_c par rapport au cas élastique pour différents temps de relaxation τ (s)

Où $\Delta_{min} = \frac{H_{min}^e - H_{min}^v}{H_{min}^e}$ et $\Delta_c = \frac{H_c^e - H_c^v}{H_c^e}$.

• La hauteur de la rugosité doit rester faible par rapport à l'épaisseur du film de fluide. Les études d'épaisseur de film pour des contacts mous lisses, comme celles de Myant [MFSS10], montrent une bonne corrélation avec les prédictions de Moes [Moe00]. L'épaisseur du film d'eau dans un contact lisse calculée par la formule de Moes est exposée dans la figure 5.23. Elle est donnée à partir des conditions de contact de la table 5.3 mais avec un module d'Young d'environ 300 MPa . Ces épaisseurs de film d'eau sont très proches des mesures effectuées par Wallace et al [WT69].

À partir de l'amplitude de la surface du sol et de celle des sommets en contact avec la gomme, montrées dans la figure 5.24, on peut émettre l'hypothèse que l'eau ne pourra pas cacher le spectre du sol dont le vecteur d'onde est inférieur à 100 mm^{-1} .

En admettant que l'épaisseur du film d'eau ne dépende pas de la rugosité, la condition $Ai/h < 10\%$ est obtenue pour les rugosités dont le vecteur d'onde est supérieur à 1000 mm^{-1} . Donc en tenant compte de la diminution de l'épaisseur du film d'eau par les rugosités, il est clair que la majorité du spectre du sol sera dans des conditions où $Ai/h \gg 10\%$.

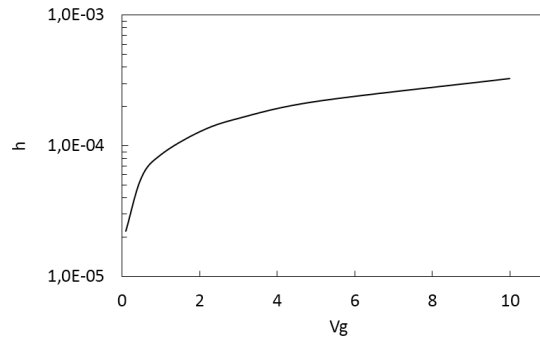


FIGURE 5.23: Hauteur du film d'eau h (mm) dans un contact lisse en fonction de la vitesse de glissement V_g (m/s)

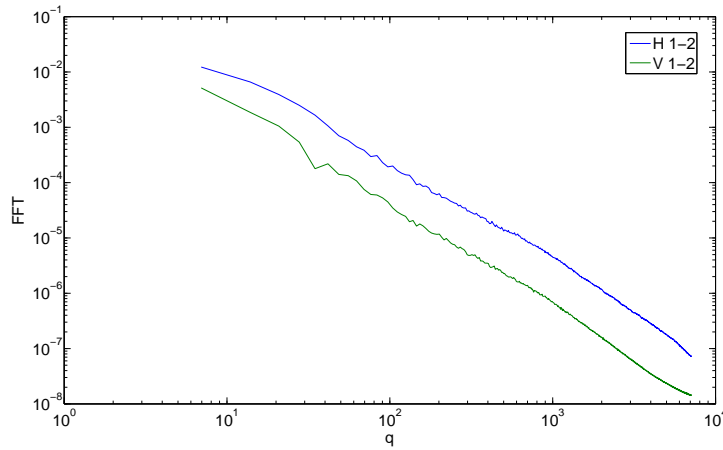


FIGURE 5.24: *FFT du sol H 1-2 et des sommets en contact avec la gomme V (mm) en fonction de q (mm^{-1})*

- La surface employée pour la création de la loi de réduction d'amplitude est composée de deux sinus créant une surface isotropique. Les vérifications mises en évidence dans la section 5.3.1 ont prouvé que les surfaces extraites possèdent cette propriété. On en déduit que le coefficient de frottement sera identique quelle que soit la direction du pain de gomme. La TRA pourra donc être appliquée suivant n'importe quelle direction de la surface.

- Enfin, la TRA construite dans le chapitre précédent a été étudiée dans le cas de roulement pur. Or le pain de gomme est à la fois en roulement et en glissement selon sa position sur la bande de roulement. À l'entrée du contact, le pain de gomme est en roulement, alors que le reste est en glissement. Les conditions de lubrification sont donc assez différentes selon sa position sur la bande de roulement. Néanmoins, la zone prépondérante dans l'adhérence du pneumatique est celle où ce dernier se trouve en glissement. C'est cette zone qui sera donc analysée. Les vitesses de glissement seront calculées à partir du SRR global qui est compris entre 5 et 15% pour obtenir le coefficient de frottement maximal.

Sperka et al ont étudié expérimentalement la réduction d'amplitude de la rugosité dans des cas élastiques piezo-visqueux en roulement-glissement. Ils ont montré que pour des taux de roulement-glissement inférieurs à 10%, l'étude d'un contact en roulement pur était suffisante [Spe11]. L'utilisation de données en roulement pur pour une application en roulement-glissement reste raisonnable dans notre étude.

5.4.2 Vérification de la prédiction par la TRA

Afin de vérifier la pertinence de l'utilisation de la TRA pour un contact viscoélastique et son application au calcul du coefficient de frottement, une simulation a été mise en place. Le cas de calcul reprend les conditions de contact du pain de gomme sur une géométrie simplifiée, composée d'une sphère d'un rayon de courbure de 0.01 mm et d'une rugosité décrite par une sinusoïde de longueur d'onde de $1\mu\text{m}$ et d'une amplitude de $5.10^{-2}\mu\text{m}$. Le matériau, voir table 2.1, a été choisi pour obtenir une différence de coefficient de frottement suffisante entre les cas lisse et rugueux tout en conservant une amplitude de rugosité faible pour rester au plus près du domaine linéaire de la TRA.

La modélisation représente le glissement de la sphère rigide rugueuse sur le massif semi-infini viscoélastique. La vitesse du massif est nulle. Ainsi, la vitesse de glissement de la sphère est égale à la

vitesse d'entraînement u_s . Cette dernière, variant de 0.08 à 2.5 m/s , est incluse dans le calcul du paramètre de charge M qui varie de 52 à 693.

Compte tenu du manque de robustesse du code de calcul, la viscosité de l'eau a été augmentée par un rapport de 2000, permettant de rester dans des plages du coefficient de charge M de Moes calculables. Ainsi, la viscosité vaut $2.10^{-6} MPa.s$. La charge est de 0.015 N .

La TRA s'appliquant sur l'amplitude de la rugosité, le modèle de diminution du coefficient de frottement n'agit que sur le frottement provenant de la rugosité. Ainsi, une prédiction du coefficient de frottement lubrifié rugueux peut être établie :

$$\mu_{rug}^{lub} = \mu_{lisse}^{lub} + (1 - \frac{A_d}{A_i})(\mu_{rug}^{sec} - \mu_{lisse}^{sec}) \quad (5.8)$$

où la réduction d'amplitude est calculée à partir des résultats du chapitre précédent :

$$\frac{A_d}{A_i} = \frac{1}{1 + 0.0018\bar{\nabla}^{7/2}} \quad (5.9)$$

On remarque que la formule 5.8 nécessite la connaissance des coefficients de frottement sec rugueux et lisse ainsi que lubrifié lisse. Ainsi, quatre calculs numériques doivent être effectués. Un calcul lubrifié rugueux VEHD qui devra être prédit à partir de trois autres calculs, un sec lisse, un sec rugueux et un lubrifié lisse. Ensuite, la réduction d'amplitude est mesurée sur le calcul rugueux VEHD, ce qui permet de vérifier la prédiction.

La figure 5.25 montre ces quatre calculs, la prédiction et la vérification. On remarque que la prédiction à partir de la TRA "prédiction TRA" suit la courbe VEHD lisse. Cela provient du paramètre $\bar{\nabla}$ trop faible pour permettre une transmission suffisante de la pression ; à la vitesse d'entraînement minimale, $A_d/A_i = 0.9967$. En réalité, la déformation est plus importante, comme on peut le voir sur la figure 5.26 par la courbe A_d/A_i mesuré. Le rapport de l'amplitude de la rugosité sur l'épaisseur de film de fluide a_i/hc est trop important pour être correctement prédit par la TRA. Si on remplace dans l'équation 5.8 le paramètre A_d/A_i prédit par celui mesuré, la prédiction devient plus proche du résultat VEHD rugueux. Au-dessus d'une vitesse d'entraînement de 0.25 m/s , la prédiction comporte une erreur inférieure à 0.01%, mais elle va jusqu'à 7.5% pour les vitesses inférieures. Avec la bonne déformation, l'erreur ne serait que de 4%.

La figure 5.27 montre la hauteur du film de fluide le long de la ligne centrale. La forme de la déformation due à la rugosité sinusoïdale est asymétrique à cause de la viscoélasticité. Cela peut expliquer en partie que la TRA ne prédit pas particulièrement bien les résultats d'un contact VEHD rugueux. Il est possible que la relation entre le coefficient de frottement de la rugosité et le rapport de déformation A_d/A_i ne soit pas linéaire dans le cas lubrifié, bien que cela ait été vérifié dans le cas sec.

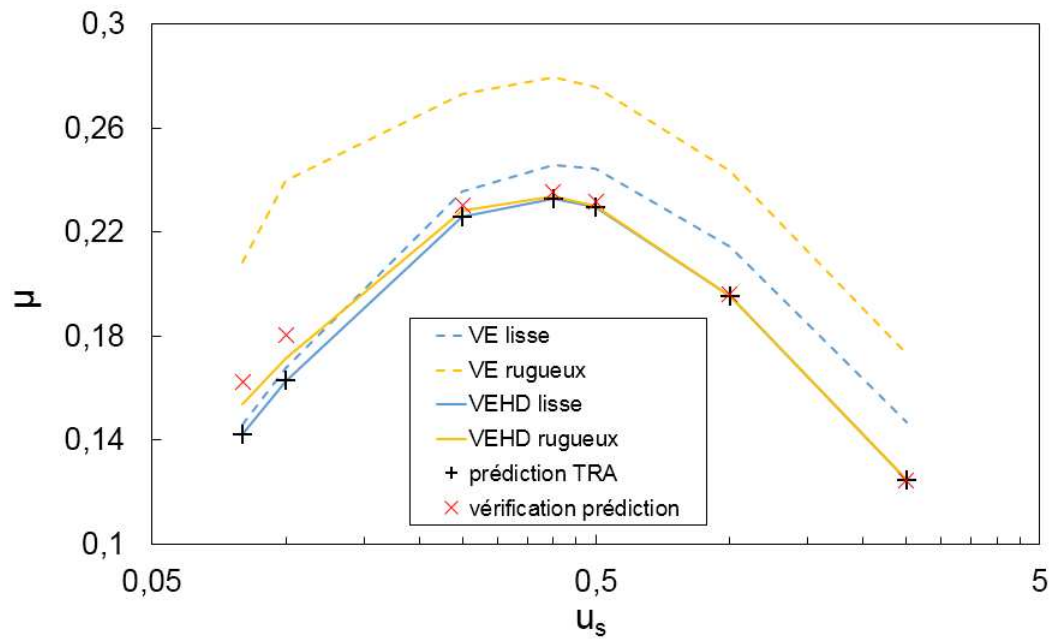


FIGURE 5.25: Coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse d'entraînement u_s (m/s)

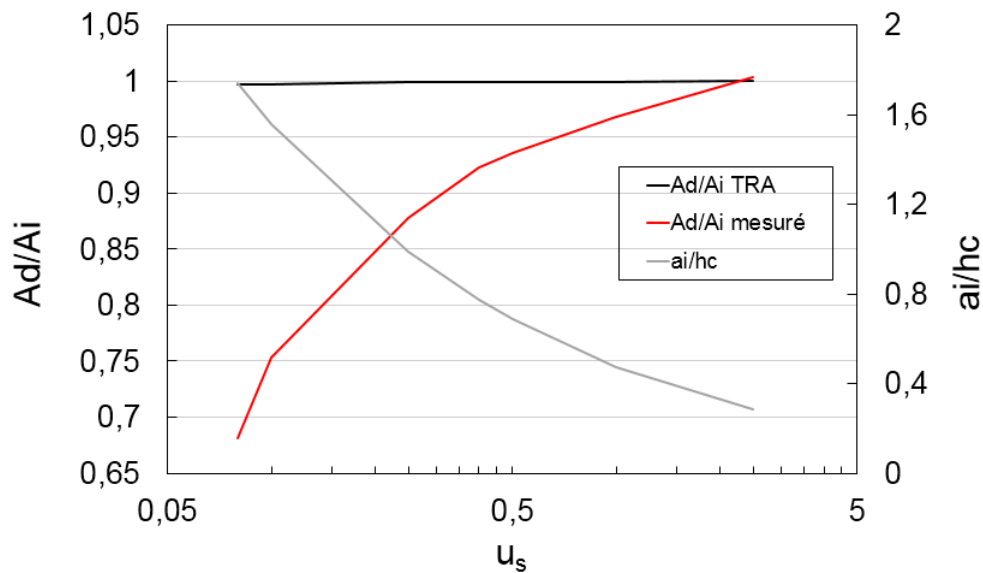


FIGURE 5.26: Réduction d'amplitude A_d/A_i et rapport de hauteur de rugosité sur épaisseur de film de fluide a_i/hc en fonction de la vitesse d'entraînement u_s (m/s)

Cette étude a permis de montrer que la TRA peut prédire le coefficient de frottement d'un contact VEHD rugueux. Seulement, une viscoélasticité importante associée à une amplitude de rugosité trop grande par rapport à l'épaisseur du film de fluide engendre une erreur dans le calcul du rapport de déformation A_d/A_i .

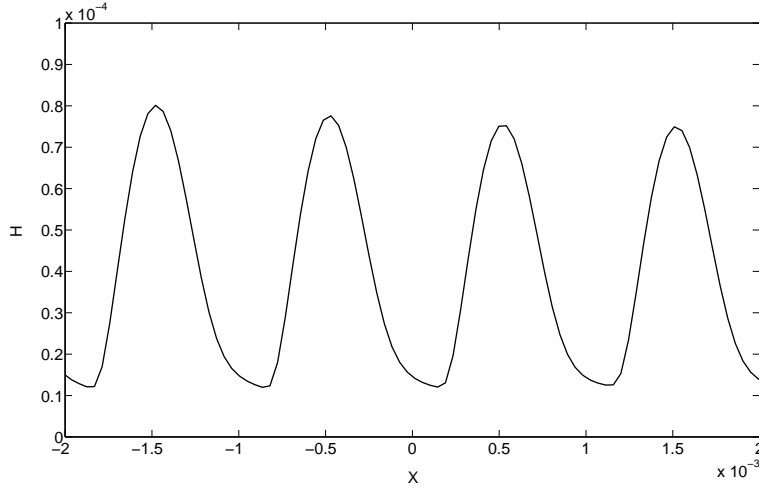


FIGURE 5.27: *Hauteur du film de fluide (mm) en fonction de X (mm) le long de la ligne centrale*

5.4.3 Calcul du coefficient de frottement

Le but de l'étude n'est pas d'obtenir le coefficient de frottement le plus réaliste possible mais de le comparer dans les cas de revêtements sec et mouillé. Le calcul par la méthode de contact sec par FFT est possible, cependant elle reste moins rapide qu'une méthode analytique. Le modèle de calcul du coefficient de frottement choisi est celui d'Heinrich [HK00] :

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\langle \delta \rangle}{\sigma_0 v} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega \omega G''(\omega) S(\omega) \quad (5.10)$$

L'intégrale calcule l'énergie dissipée par la déformation de la gomme à partir du module de perte en cisaillement $G''(\omega)$ et de la DSP $S(\omega)$. v est la vitesse de glissement et $\langle \delta \rangle$ est la pénétration moyenne de la gomme dans le sol.

Le terme σ_0 est la contrainte normale totale sur la gomme. Une version simplifiée existe sous la forme [HK00] :

$$\sigma_0 = \frac{0.53 \xi_{\perp} E'(\omega_{min})}{\pi \xi_{\parallel}} F_{3/2}\left(\frac{d}{\tilde{\sigma}_s}\right) \quad (5.11)$$

ξ_{\perp}^2 est l'amplitude maximale du spectre de corrélation de hauteur et ξ_{\parallel} est la longueur d'onde au-delà de laquelle le spectre devient constant. Ces deux paramètres sont trouvés par juxtaposition de la DSP des surfaces aux droites analytiques de Klüppel, voir figure 5.3.

$E'(\omega_{min})$ est le module de stockage en traction-compression à la fréquence d'excitation minimale.

$F_{3/2}(d/\tilde{\sigma}_s)$ est la fonction de Greenwood-Williamson où d est la distance entre la ligne moyenne du sol et la hauteur minimale de la gomme ; $\tilde{\sigma}_s$ est la variance de la distribution de hauteur des sommets en contact, elle est approximée par $\xi_{\parallel}/\sqrt{2}$.

d est calculée à partir de la hauteur minimale du diagramme de distribution des hauteurs du pain de gomme, voir figure 5.19. On trouve des rapports $d/\tilde{\sigma}_s$ de l'ordre de 1.10^{-6} , donnant environ 0.43 à la fonction $F_{3/2}$.

Enfin, $\langle \delta \rangle$ est trouvée grâce à la moyenne de la hauteur du spectre des sommets du sol en contact avec la gomme. On trouve environ $0.0366mm$ pour le sol 1-2.

Bien qu'assez simple, ce modèle de coefficient de frottement permet de tenir compte des propriétés principales du matériau viscoélastique. Il permet de faire le lien entre ces propriétés et la fréquence d'excitation du matériau due à la vitesse de glissement et au spectre du sol. Ce dernier étant atténué par l'effet de la lubrification, le coefficient de frottement s'en retrouvera alors diminué.

5.4.4 Application et compréhension

- Le calcul du coefficient de frottement sur sol mouillé s'effectuera sur le spectre filtré V^{lub} . Ce dernier est trouvé par l'application de la réduction d'amplitude sur la transformée de Fourier du spectre des sommets en contact avec la gomme V . On retrouve le nouveau spectre filtré en effectuant une transformée de Fourier inverse.

$$V^{lub} = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(V) \cdot \left(1 - \frac{A_d}{A_i}\right) \right) \quad (5.12)$$

Le calcul du rapport de déformation A_d/A_i vient du paramètre $\bar{\nabla}$, voir équation 5.13. Ce calcul est prépondérant puisqu'il tient compte de tous les paramètres du contact.

$$\bar{\nabla} = (\lambda/a) \sqrt[3]{M} \quad (5.13)$$

La longueur d'onde λ prend en compte toutes les longueurs d'onde du spectre de la déformée de la gomme. Ainsi, $\bar{\nabla}$ est une matrice ayant, pour chaque ligne suivant X , le spectre de toutes les longueurs d'onde.

La longueur d'onde est adimensionnée par rapport au rayon d'Hertz a . On peut à la fois calculer a analytiquement pour un cas lisse ou le mesurer après calcul numérique. La seconde méthode est choisie ; le rayon de contact est obtenu à partir des calculs élastiques effectués précédemment dans la section 5.3.2.

Les surfaces étant isotropes, la réduction d'amplitude est appliquée suivant une direction qui sera vue comme la direction de glissement de la gomme.

Le calcul du paramètre de charge M de Moes implique une simplification. En effet, le module d'Young du matériau est considéré élastique. Or, dans un cas viscoélastique, le module d'Young va augmenter lorsque l'on va se rapprocher de la surface de la bande de roulement où la gomme est déformée par des rugosités de très faible longueur d'onde. Le module d'Young élastique sera l'amplitude du module complexe de traction-compression viscoélastique, voir équation 5.14. La propriété élastique de la gomme sera donc constituée d'un ensemble de couches allant du module d'Young le plus faible vers le plus élevé lorsque l'on se rapproche de la surface du pain de gomme.

$$|E^*(\omega)| = \sqrt{|E'(\omega)|^2 + |E''(\omega)|^2} \quad (5.14)$$

où ω est la pulsation d'excitation de toutes les longueurs d'onde du sol.

Le reste des paramètres est plus simple à obtenir. La charge, la viscosité de l'eau et le rayon de courbure sont connus. Le rayon de courbure sera choisi comme étant celui de l'aspérité ayant la plus grande amplitude, puisque c'est elle qui conditionnera la déformation majeure du pain de gomme. Ces paramètres sont repris de l'étude de contact sur le sol, voir table 5.3.

- L'étude du contact se place dans le repère de la route, sa vitesse est donc nulle. La zone d'étude se situe à l'arrière du pneumatique, où ce dernier est en cisaillement ou glissement. En cisaillement, sa vitesse par rapport à la route est nulle, ainsi aucun calcul de lubrification ne peut être effectué. En condition de forte demande d'adhérence, le pain de gomme glisse, ainsi sa vitesse par rapport

à la route sera la vitesse de glissement. C'est donc cette vitesse qui conditionnera les calculs de lubrification. Le tableau 5.6 montre le SRR en fonction de la vitesse du véhicule et de la vitesse de glissement de la gomme sur la route. Les vitesses de glissement élevées devront être employées pour des vitesses importantes du véhicule parce qu'il faut rester dans des taux de SRR raisonnables.

Vitesse glissement \ Vitesse véhicule	0.1	0.5	1	2	5	10
50	0.36	1.8	3.7	7.8	22	56
90	0.2	1	2	4.2	11.1	25
130	0.14	0.7	1.4	2.8	7.4	16

TABLE 5.6: Taux de SRR (%) en fonction de la vitesse de glissement (m/s) et de la vitesse du véhicule (km/h).

- La réduction d'amplitude joue un rôle de filtre passe-bas, c-à-d qu'elle réduit fortement l'amplitude des petites longueurs d'onde du spectre. La figure 5.28 compare la DSP du sol 1-2 avec la DSP filtrée par la TRA à une vitesse de glissement d' $1m/s$ pour le cas où M utilise le module moyen du matériau "Emoy" et le cas où le module est calculé en fonction de la longueur d'onde "E*" suivant l'équation 5.14. Les deux résultats sont très proches ; la méthode par calcul en fonction de la longueur d'onde présente une pente de filtrage plus importante puisque le module du matériau augmente vers les petites longueurs d'onde. La méthode de calcul du module élastique en fonction de la longueur d'onde semble la plus proche du cas viscoélastique, elle est donc retenue.

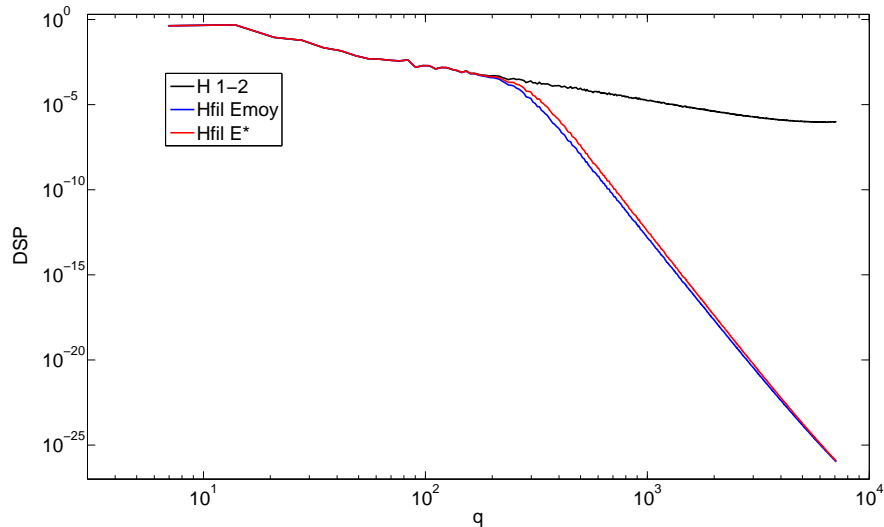


FIGURE 5.28: DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour le sol 1-2 et deux types de filtration

Pour une vitesse de glissement de $0.1m/s$, le paramètre de charge de Moes M utilisant l'équation 5.14 varie de 3240 à 6250, alors qu'il est de 3175 avec l'utilisation du module moyen.

On remarque facilement la différence avec la théorie de Persson [PTAT05] où la DSP est réduite de manière homogène sur tout le spectre de longueur d'onde.

Variation en fonction de la vitesse

• Pour une même surface, le filtrage est de plus en plus important à mesure que la vitesse de glissement augmente, comme le montrent les figures 5.29 et 5.30. Quand la vitesse augmente, la pente de diminution reste identique mais le filtrage démarre à des longueurs d'onde plus importantes. Ce décalage est proche du linéaire car le rapport entre la vitesse d'entraînement u_s et A_d/A_i est inversement proportionnel à la puissance 7/8 [MSICL12].

Quelle que soit la vitesse de glissement, la filtration démarre suffisamment tôt pour rester avec des rapports d'amplitude des rugosités sur hauteur du film d'eau ai/h acceptables.

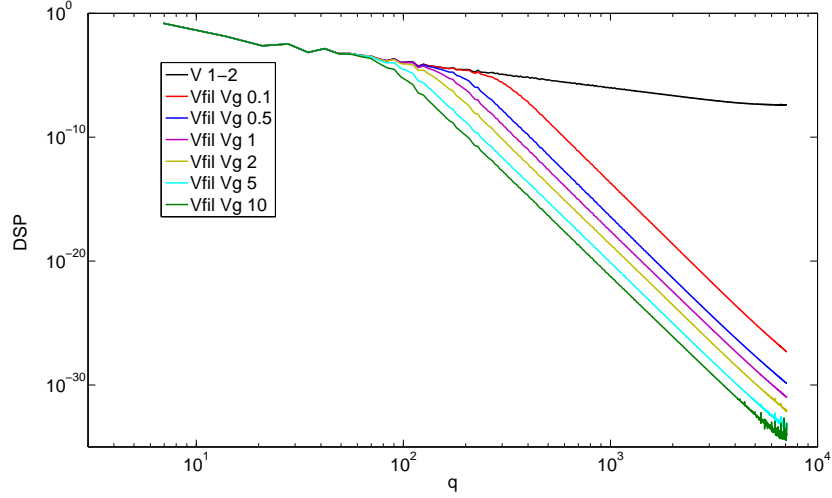


FIGURE 5.29: DSP (mm⁴) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 et en fonction du vecteur d'onde q (mm⁻¹) pour différentes vitesses de glissement Vg

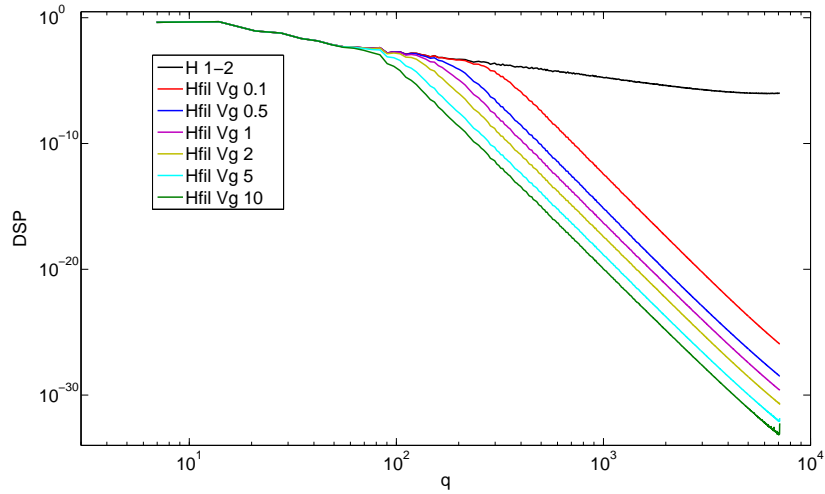


FIGURE 5.30: DSP (mm⁴) du spectre d'origine et filtré de la surface 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm⁻¹) pour différentes vitesses de glissement Vg

• La DSP de la déformée de la gomme est différente de celle de l'étude 5.3.2 puisque la charge utilisée est de 0.7N. Le paramètre de charge M maximum, va donc de 6250 à 200, pour des vitesses de glissement allant de 0.1 à 10m/s. Ces valeurs sont faibles à cause de la charge utilisée, trop

éloignée des conditions réelles.

L'application du filtre sur le profil des sommets en contact V est montrée dans les figures 5.31 et 5.32. Il est facilement observable que l'amplitude des rugosités de grande longueur d'onde est conservée, alors que celle des petites longueurs d'onde est atténuée ou complètement effacée.

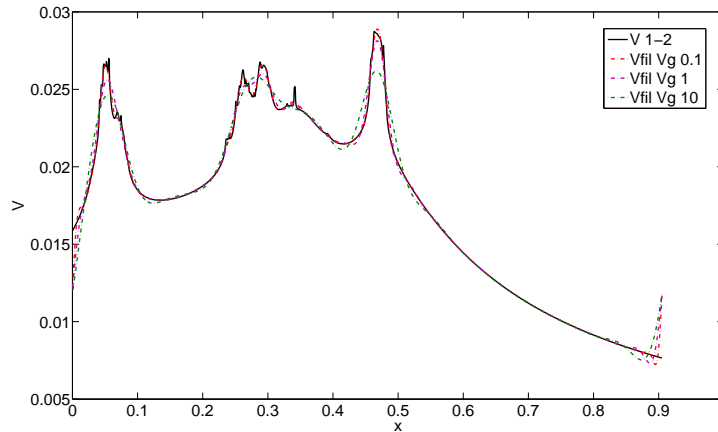


FIGURE 5.31: Amplitude de la déformation (mm) de la surface 1-2 d'origine et filtrée pour différentes vitesses de glissement " V_g " (m/s) suivant la ligne X (mm)

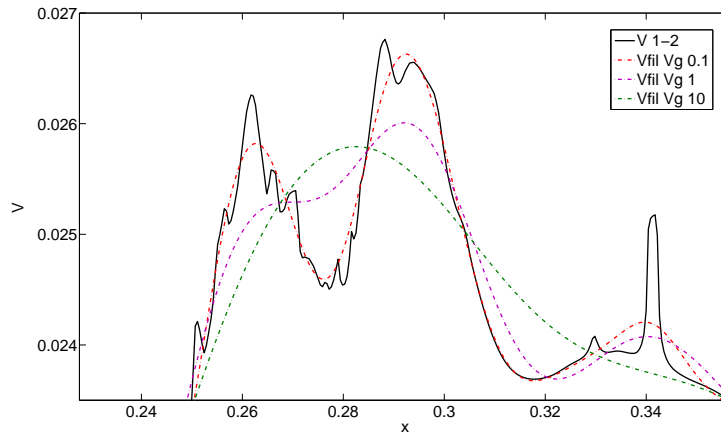


FIGURE 5.32: Amplitude de la déformation (mm) de la surface 1-2 d'origine et filtrée pour différentes vitesses de glissement " V_g " (m/s) suivant la ligne X (mm)

- Le coefficient de frottement pour les spectres des sommets (trait continu) et les spectres filtrés (trait discontinu) en fonction de la vitesse de glissement est visible dans la figure 5.33. La différence entre les deux coefficients de frottement diminue lorsqu'on augmente la vitesse, notamment pour les sols neufs, comme le montre la figure 5.34. On aurait pu s'attendre à ce que la lubrification impose le maximum du coefficient de frottement à une vitesse de glissement inférieure au cas sec, or l'inverse se produit.

Étudié sur une plage de vitesse de glissement plus étendue, voir figure 5.35, le coefficient de frottement lubrifié diminue bien, mais obtient son maximum à une vitesse de glissement plus élevée que le cas sec.

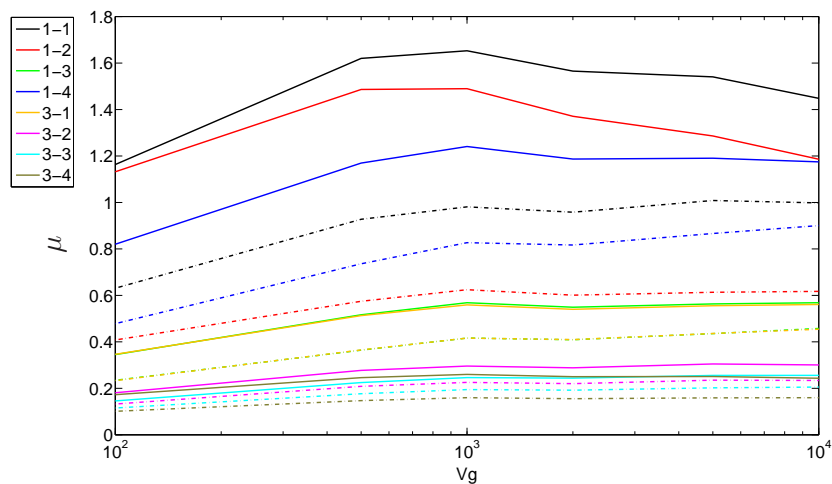


FIGURE 5.33: Coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de glissement V_g (mm/s)

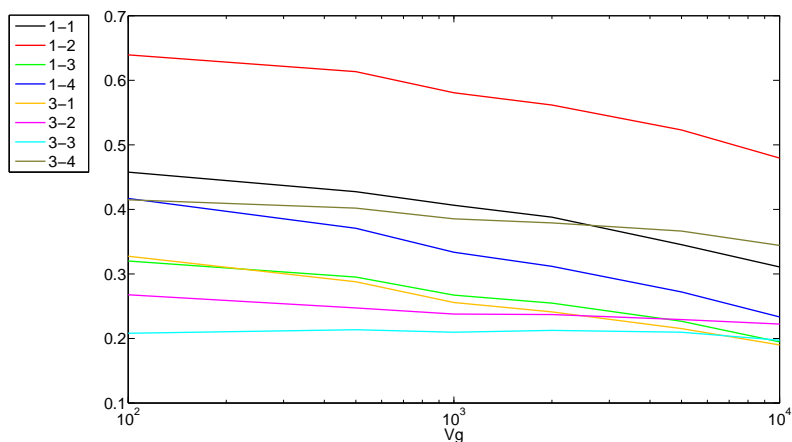


FIGURE 5.34: Différence relative du coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de glissement V_g (mm/s)

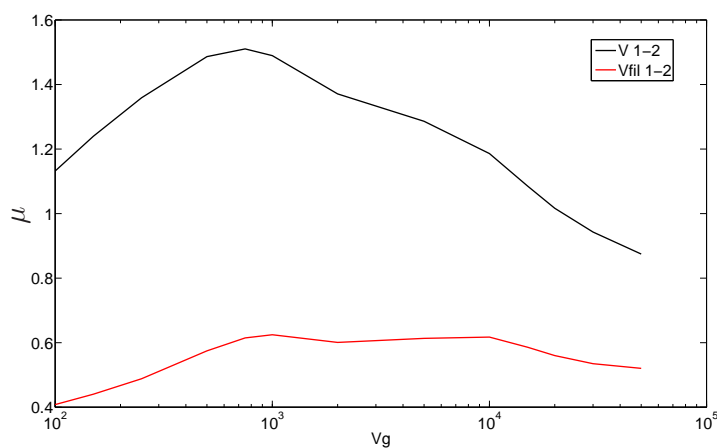


FIGURE 5.35: Coefficient de frottement μ sec et lubrifié en fonction de la vitesse de glissement V_g (mm/s)

- Ce phénomène provient du choix du matériau. En effet, comme le montre la figure 5.36, l'augmentation de la vitesse de glissement engendre un décalage du module de perte vers les grandes longueurs d'onde, puisqu'elles excitent le matériau à des fréquences plus élevées. Or ce sont ces longueurs d'onde qui ne sont jamais filtrées par la lubrification. Cela explique que le maximum du coefficient de frottement peut se trouver à des vitesses de glissement plus importantes dans le contact lubrifié. La pulsation d'excitation du matériau peut être retrouvée par la formule $\omega = q \cdot Vg$.

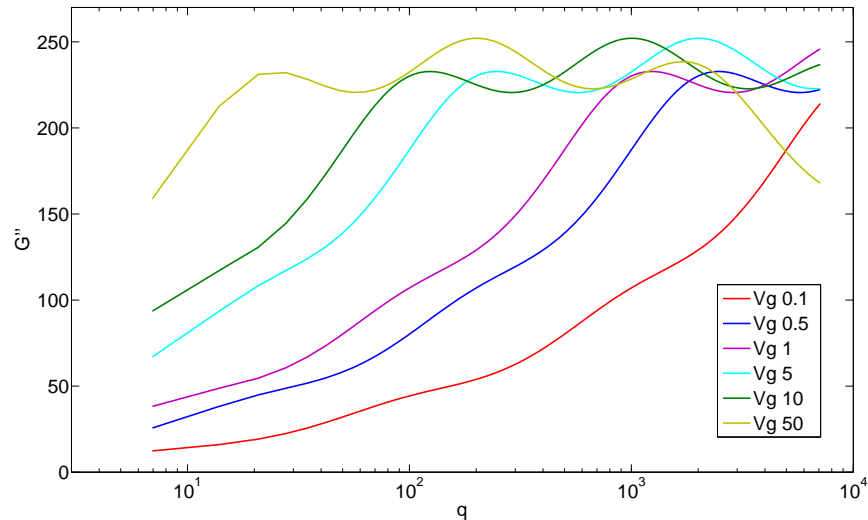


FIGURE 5.36: Module de perte G'' (MPa) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement " Vg " (m/s)

Ce résultat est semblable à celui trouvé expérimentalement par Grosch [Gro69] qui a mesuré le frottement entre une surface sèche, mais salie pour éviter l'adhésion, et la même surface mouillée par l'eau.

- La DSP des sommets en contact de chaque sol donne évidemment une corrélation parfaite du niveau du coefficient de frottement sec. Le fait que le sol 1-2 échange sa position avec le 1-4 entre le cas sec et mouillé, vient de l'importance de la DSP aux petites longueurs d'onde du sol 1-2. Ces longueurs étant très filtrées, la surface 1-2 a fortement perdu de sa capacité à conserver l'adhérence. La rugosité σ_{RMS} apporte une assez bonne corrélation avec le coefficient de frottement en sec ; on remarque que le coefficient de frottement augmente avec σ_{RMS} . Il est par contre très difficile de trouver une relation entre les propriétés statistiques des sols et le niveau ou la perte du coefficient de frottement en lubrifié. En effet, le spectre des déformées de la gomme ne suivant pas suffisamment une pente fractale, explique l'impossibilité d'effectuer une corrélation.

Le taux et la raideur du contact ne permettent pas de voir facilement une corrélation avec les résultats obtenus.

- Les résultats montrent que les sols avec des amplitudes faibles aux grandes longueurs d'onde, conservent mal l'adhérence sur sol mouillé. Tout d'abord la faible amplitude des grandes longueurs d'onde engendre une épaisseur de film d'eau plus importante, qui séparera plus facilement la gomme des petites longueurs d'onde. Enfin, ces sols qui tirent une plus grande partie des petites longueurs d'onde pour l'adhérence auront une perte plus importante à cause du filtrage par l'effet de lubrification.

Etude de la diminution du coefficient de frottement

- La différence relative entre le coefficient de frottement dans les cas sec et mouillé montre une tendance générale décroissante en observant la figure 5.34. Sur une plage de vitesse de glissement plus importante, la différence relative a une forme en cloche comme le montre la figure 5.37. Néanmoins la différence est assez importante à des vitesses de glissements faibles ($< 1\text{mm/s}$), alors qu'on aurait pu penser qu'elle n'aurait été significative qu'à partir de vitesses bien supérieures. Cette sous-section porte sur l'explication de ce phénomène.

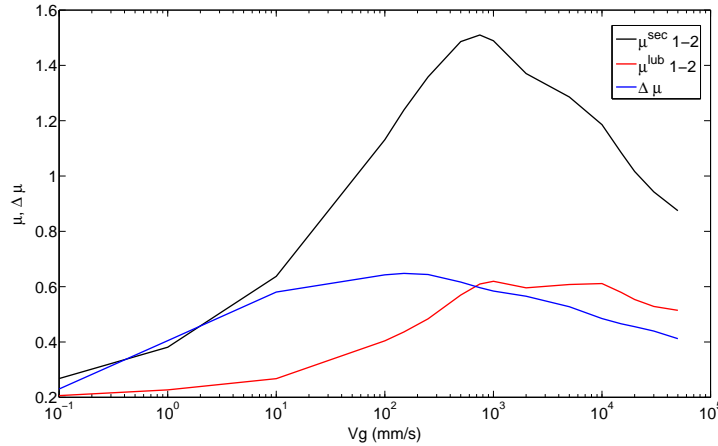


FIGURE 5.37: Coefficient de frottement μ et sa différence relative $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s)

Le coefficient de frottement a été calculé sur une plage d'excitation provenant de la totalité du spectre du sol. Un *cut-off* peut être utilisé pour réduire la taille du spectre. Heinrich [HK00] conseille de conserver un rapport entre la longueur d'onde la plus importante et la plus faible du spectre du sol de 10^3 ce qui est le cas dans l'étude présente : $\lambda_{max} = 0.904\text{mm}$ et $\lambda_{min} = 8.8 \cdot 10^{-4}\text{mm}$.

En admettant que la décade des plus hautes fréquences du sol ne soit pas prise en compte dans le calcul du coefficient de frottement, l'adhérence sera moins impactée par la lubrification puisque la diminution de la plage d'excitation sera moindre. Cet impact est montré dans la figure 5.38. La différence de coefficient de frottement est bien inférieure au cas sans *cut-off*. Lors de faibles vitesses de glissement, la différence est nulle dans le cas où le *cut-off* intervient à une longueur d'onde minimale λ_{min} de 10^{-2}mm .

De plus, le maximum de la perte d'adhérence est obtenu à des vitesses de glissement plus élevées dans le cas avec *cut-off*, ce qui a tendance à ramener le maximum du coefficient de frottement dans le cas lubrifié vers des vitesses de glissement plus faibles.

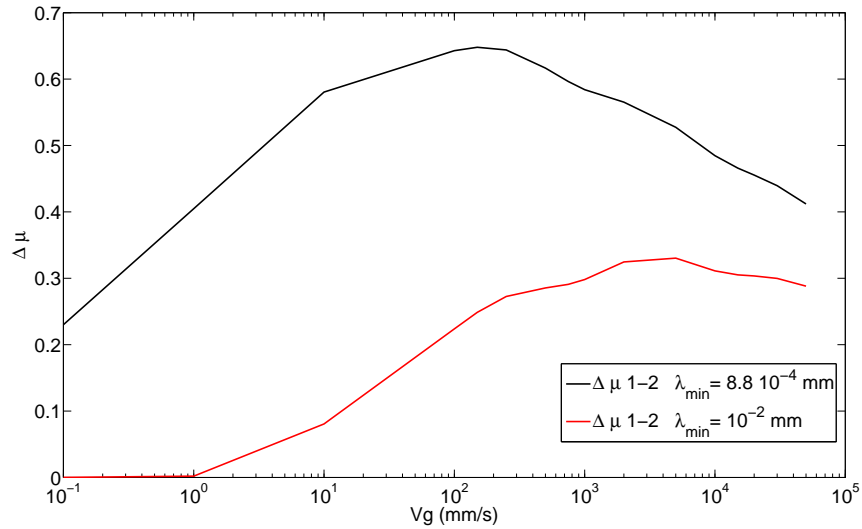


FIGURE 5.38: Différence relative du coefficient de frottement entre le cas sec et mouillé $\Delta\mu$ en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) avec et sans cut-off

• L'influence des propriétés matériau sur la forme de la diminution est aussi étudiée. La figure 5.36 montre que le module de perte G'' contient des fluctuations qui ne sont pas représentatives du comportement réel du matériau. Cela provient du recalage des données d'essai sans logiciel adapté. Des données matériau recalées "mat recalé" à partir d'un logiciel efficace sont comparées au matériau de Le Gal [LGYK05] non recalé dans la figure 5.39.

La différence relative du coefficient de frottement est comparée entre ces deux matériaux dans la figure 5.40, à la fois avec et sans cut-off. On remarque que la perte d'adhérence est plus importante et plus lisse pour le matériau recalé. Néanmoins, la tendance reste très proche.

L'obtention du maximum du coefficient de frottement lubrifié à des vitesses de glissement plus élevées que dans le cas sec provient bien de la forme générale du facteur de perte et plus précisément de la position de son maximum.

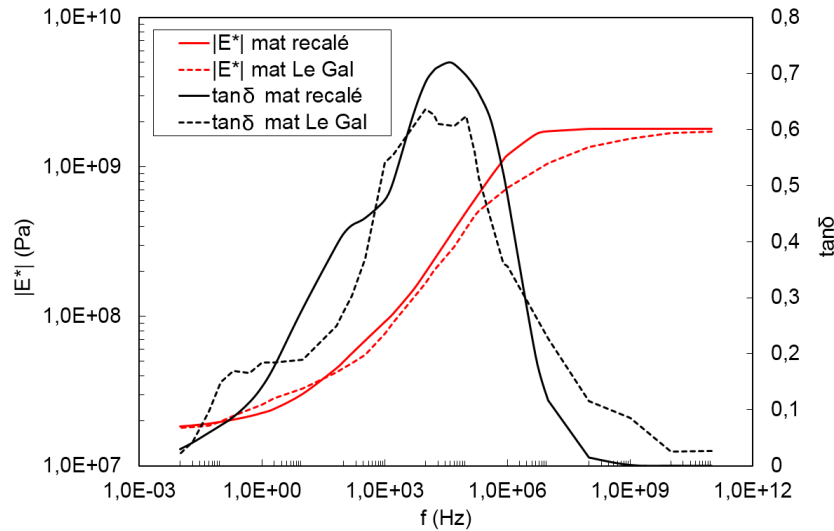


FIGURE 5.39: $|E^*|$ et $\tan\delta$ du matériau de Le Gal [LGYK05] et d'un matériau recalé en fonction de la fréquence (Hz)

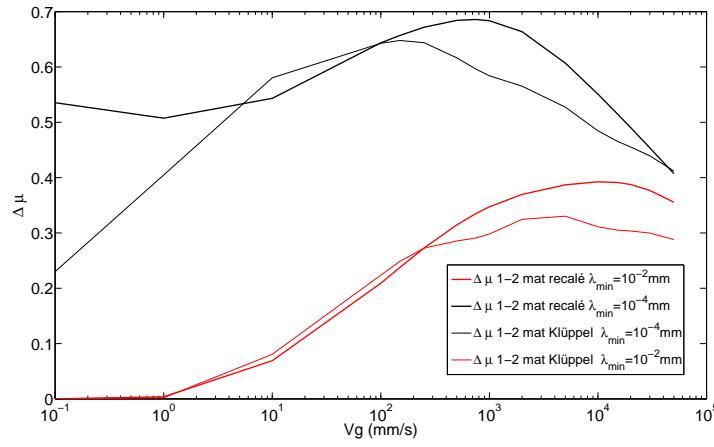


FIGURE 5.40: Différence relative du coefficient de frottement $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) avec et sans cut-off pour 2 matériaux

• La figure 5.29 montre que la filtration des rugosités démarre très tôt puisqu'à une vitesse de glissement Vg de $0.1m/s$, la moitié du spectre du sol est masquée à cause de conditions de contact où la charge $w = 0.7N$ est trop faible.

En employant des conditions de contacts réalistes, utilisées dans l'étude 5.3.2 où la charge vaut $5N$, la figure 5.41 compare le démarrage de la filtration par la lubrification entre le cas réaliste à $5N$ et faiblement chargé à $0.7N$. L'augmentation de la charge w a permis d'augmenter le paramètre de charge de Moes M , démarrant la filtration à des longueurs d'onde près de deux fois plus faibles. Néanmoins, il faut encore des vitesses de glissement très faibles pour que la filtration démarre vers les plus petites longueurs d'onde.

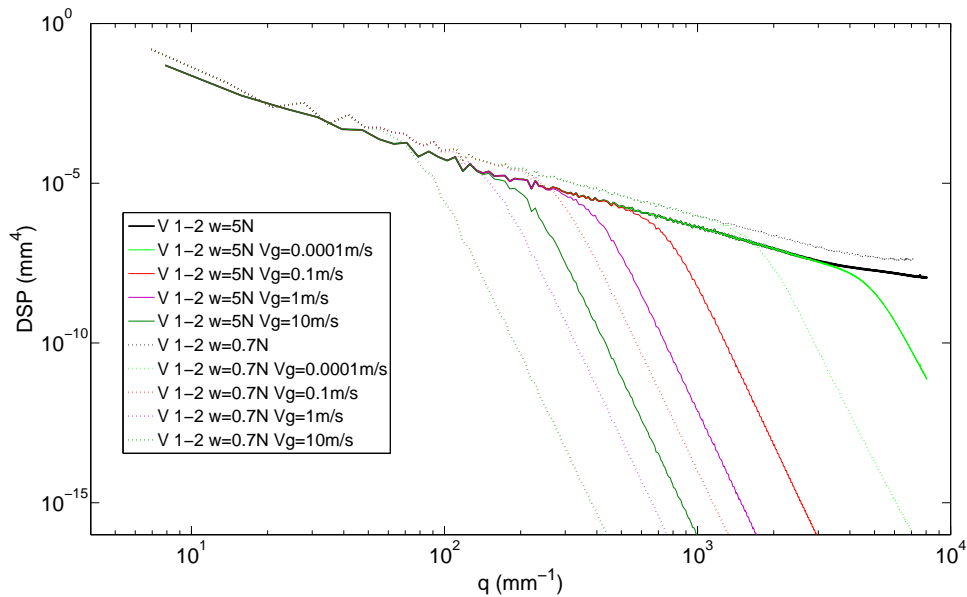


FIGURE 5.41: DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement Vg et pour deux conditions de contact

La figure 5.42 compare les coefficients de frottement et leur différence relative entre le cas faiblement chargé et réaliste. La différence relative est plus faible pour le cas de charge réaliste puisque le filtrage

par la TRA est plus faible. Néanmoins l'allure de cette courbe reste inchangée, puisque les courbes de coefficient de frottement ont subi une homothétie sur toute la plage de vitesses de glissement.

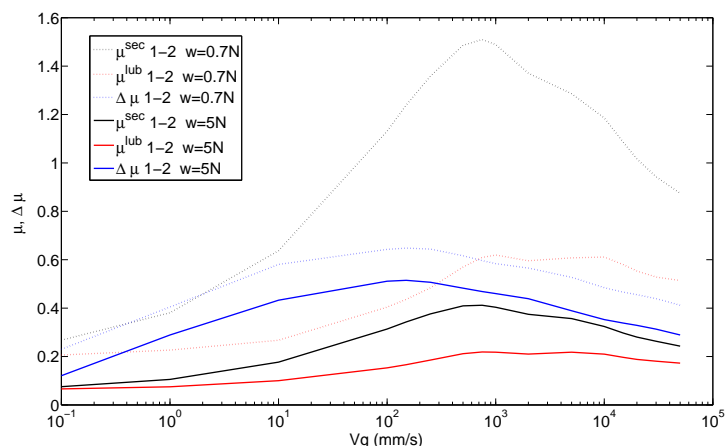


FIGURE 5.42: Coefficient de frottement μ et sa différence relative $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) pour deux conditions de contact

- La non-utilisation du rapport réel A_i/h peut aussi expliquer la perte importante du coefficient de frottement aux basses vitesses de glissement. Il a été montré dans la section 5.4.1 que le rapport réel A_i/h était majoritairement supérieur à 10% dans l'étude, alors que la TRA a été créée pour un rapport inférieur à 10%. L'épaisseur du film d'eau augmentant avec la vitesse, la non-prise en compte de ce rapport sera plus importante aux faibles vitesses qu'aux hautes. Ainsi, la réduction de la déformation de la gomme par le lubrifiant sera diminuée plus largement aux faibles vitesses de glissement.

Cette étude fait intervenir certains paramètres et montre leur impact sur les résultats. La forme de la diminution du coefficient de frottement provient principalement de la relation entre la filtration du lubrifiant et de la forme du facteur de perte du matériau.

Variation en fonction de la charge

Lorsque la demande d'adhérence est importante, les pains de gomme de la bande de roulement se cisailent. Selon sa rigidité, provenant de ses dimensions et du matériau, le cisaillement peut engendrer un basculement du pain de gomme mettant en contact l'arête du pain avec le sol. Cela va augmenter la pression de contact et donc la charge portée par les cailloux.

Différents calculs de contact sec élastique sont effectués suivant les mêmes conditions de contact que la table 5.3, mais avec une charge allant de 0.5N à 7N, donnant un taux de contact allant de 3.5% à 32%.

La figure 5.43 montre la DSP de la déformation de la gomme pour la surface 1-2 et la déformation filtrée pour différentes charges à une vitesse de glissement d'1m/s. La DSP de la déformation de la gomme dans le cas sec augmente de manière homogène sur toutes les longueurs d'onde lorsque la charge augmente, puisque le taux de contact augmente.

La filtration de la TRA agit de manière similaire quelle que soit la charge. Le zoom sur le début de la DSP filtrée montre que pour une longueur d'onde d'environ $60\mu m$, la filtration est plus importante pour les contacts fortement chargés mais dans des proportions très faibles.

La faible différence de filtration entre les différentes charges s'explique par le fonctionnement de la

TRA puisque l'augmentation de la charge w augmente le paramètre de charge M de Moes mais diminue le rapport λ/a puisque le rayon de contact a augmente. Ainsi, la variation du paramètre de réduction d'amplitude A_d/A_i , montré dans la figure 5.44, est compensée par la DSP supérieure des cas chargés.

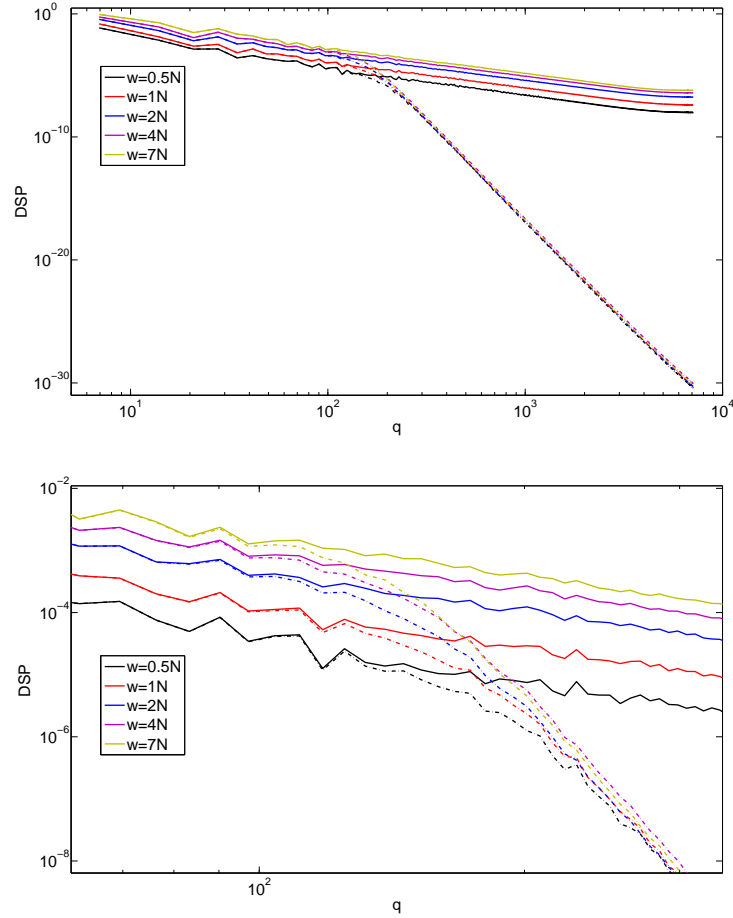


FIGURE 5.43: DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes charges w

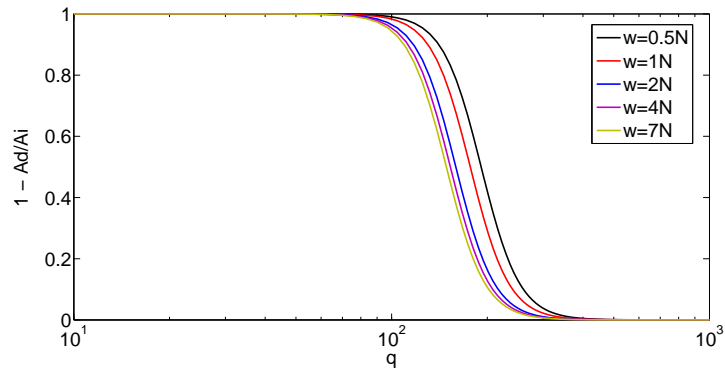


FIGURE 5.44: Réduction d'amplitude $1 - A_d/A_i$ en fonction du vecteur d'onde q (mm) pour différentes charges w sur la déformée 1-2

La figure 5.45 montre que la différence relative entre le coefficient de frottement de la déformation de la gomme sur sol sec par rapport au sol mouillé a tendance à s'accroître lorsqu'on augmente la charge.

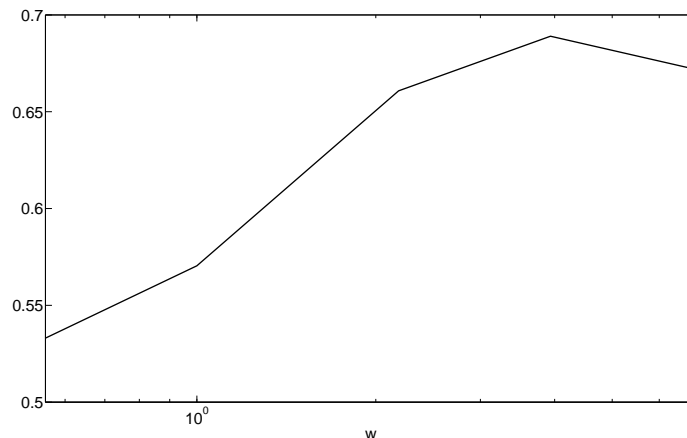


FIGURE 5.45: Différence relative entre le coefficient de frottement d'origine et filtré de la surface 1-2 en fonction de la charge w

Ces résultats montrent que la hausse de la charge provoque une augmentation de la perte de l'adhérence sur sol mouillé. Or, la prise en compte dans la TRA du rapport amplitude de la rugosité sur épaisseur du film de fluide a_i/hc aurait décalé le filtre de la TRA vers les petites longueurs d'onde lorsque la charge augmente. Ainsi, la différence relative du coefficient de frottement n'aurait pas augmenté aussi fortement lorsqu'on accroît la charge.

Variation en fonction de la viscosité de l'eau

La viscosité de l'eau reste constante vis-à-vis de la pression de contact ; par contre, l'introduction de contaminants peut fortement augmenter sa viscosité. En effet, les gaz d'échappement des véhicules ainsi que les poussières déposées sur la route sont mélangés à l'eau dès les premiers instants de pluie, ce qui est connu pour affecter très fortement l'adhérence du pneumatique. Si la pluie dure suffisamment longtemps, le ruissellement de l'eau permet d'évacuer ses contaminants, ce qui lui permet de retrouver sa propriété de faible viscosité. Ce phénomène est montré dans la figure 5.46 de Persson.

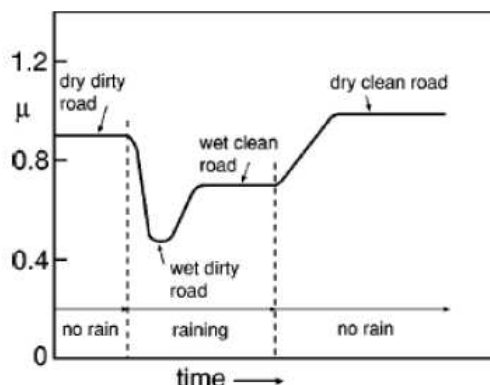


FIGURE 5.46: Adhérence du pneumatique en fonction du temps [PTAT05]

Les contaminants peuvent présenter des viscosités supérieures de plusieurs ordres de grandeur à celle de l'eau de pluie. Il est ainsi intéressant d'étudier l'impact sur le coefficient de frottement d'une augmentation de la viscosité.

Un second effet sur la viscosité de l'eau vient de sa température ; plus cette dernière est élevée, plus la viscosité de l'eau est basse, comme le montre la table 5.7. La température de la surface de la gomme peut être supérieure à $100^{\circ}C$ si celle-ci a été en contact sec avec le sol. En dissipant cette chaleur, l'eau peut alors atteindre des températures relativement élevées et voir sa viscosité diminuer.

température ($^{\circ}C$)	viscosité dynamique ($MPa.s$)
0	$1.7 \cdot 10^{-9}$
20	$1 \cdot 10^{-9}$
50	$0.5 \cdot 10^{-9}$
100	$0.28 \cdot 10^{-9}$

TABLE 5.7: Viscosité de l'eau en fonction de la température à la pression atmosphérique.

La figure 5.47 montre la DSP de la déformée de la gomme pour le sol 1-2, ainsi que la DSP filtrée à une vitesse de glissement de $1m/s$ pour différentes viscosités η allant de celle de l'eau à la température de $100^{\circ}C$ jusqu'à 10 fois plus que la viscosité à $20^{\circ}C$. La variation de la viscosité, bien qu'étant relativement faible, reste sensiblement visible.

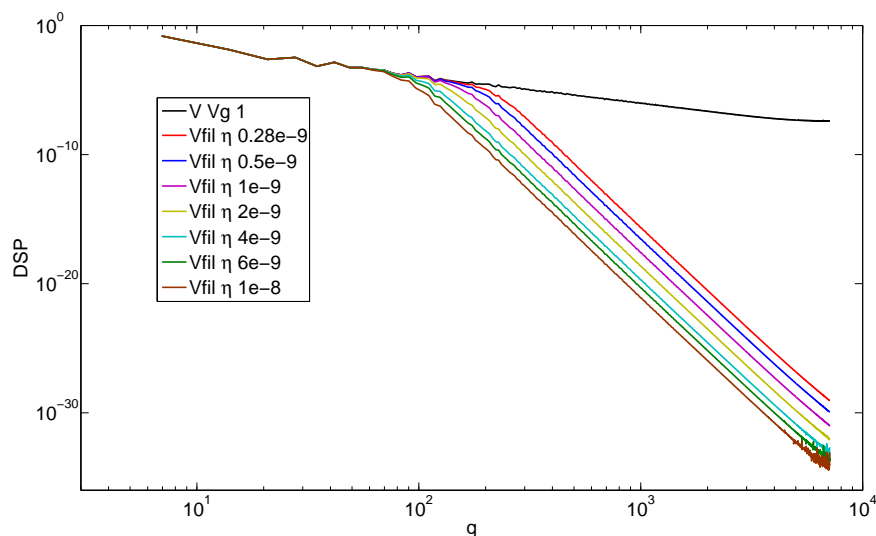


FIGURE 5.47: DSP (mm^4) du spectre de la surface 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour le sol 1-2 et la filtration pour différentes viscosités ($MPa.s$)

Son impact sur le coefficient de frottement est présenté dans la figure 5.48, où la différence relative du coefficient de frottement par rapport au cas $Vg = 1m/s$ à $20^{\circ}C$ est montrée en fonction de la viscosité η . On remarque que pour un sol tirant une grande partie de l'adhérence des rugosités de petites longueurs d'onde comme le sol 1-2, l'influence de la viscosité est plus importante que pour un sol plus orienté sur les grandes longueurs d'onde.

La diminution d'environ 30% de l'adhérence par la présence de contaminants montrée par Persson, peut s'expliquer par l'augmentation de la viscosité de l'eau. Ainsi, il est bénéfique de faire travailler

le pneumatique à haute température pour diminuer la viscosité de l'eau.

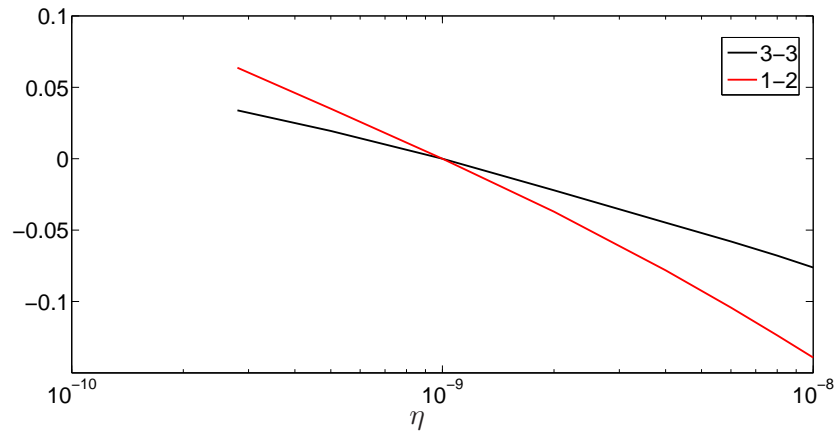


FIGURE 5.48: *Différence relative du coefficient de frottement en fonction de la viscosité de l'eau par rapport à celle à 20°C*

Influence du rayon de contact

La TRA s'applique sur un contact continu où la pression est toujours positive. Elle utilise la longueur d'onde adimensionnée par rapport au rayon de contact pour calculer la diminution de la déformation de la gomme, voir équation 5.13 ; le rayon de contact a donc un impact important.

Les figures du champ de pression 3D 5.14 et 5.15 montrent que le problème sec est composé d'une multitude de zones de contact qui sont assez éloignées. L'introduction de la lubrification a tendance à augmenter le rayon de contact mais de manière relativement faible pour de grandes valeurs de M . Il en est déduit qu'un contact unique est possible à condition que la zone soit composée de pressions très regroupées et homogènes dans le cas sec.

Le calcul du rayon de contact unique utilisé précédemment, se basant sur la somme des points en contact, est donc fortement optimiste par rapport aux rayons de contacts réels.

Une observation plus précise peut être effectuée à partir de la figure 5.49. Comparativement au rayon de contact "global" calculé à $0.1276mm$, le rayon de contact le plus important est obtenu à $0.1mm$ et le reste se situe sous $0.01mm$.

La diminution de la déformation locale de quatre rayons de contact est comparée dans la figure 5.50. La charge sur chacun de ces rayons est établie afin d'avoir une pression moyenne égale à $43 MPa$ et le rayon de courbure R_x est identique. On remarque que les conditions de contact obtenues par les contacts à faible rayon sont favorables à la conservation de la déformation de la gomme puisque le filtrage démarre pour des longueurs d'onde plus petites.

En supposant qu'une petite zone de contact ait un rayon de courbure R_x plus faible, la diminution de la déformation de la gomme serait encore plus faible puisque le paramètre de charge M augmenterait.

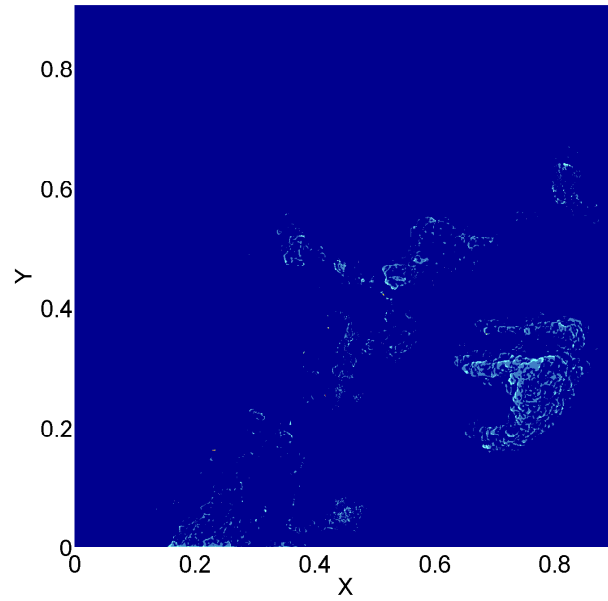


FIGURE 5.49: *Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol 1-2*

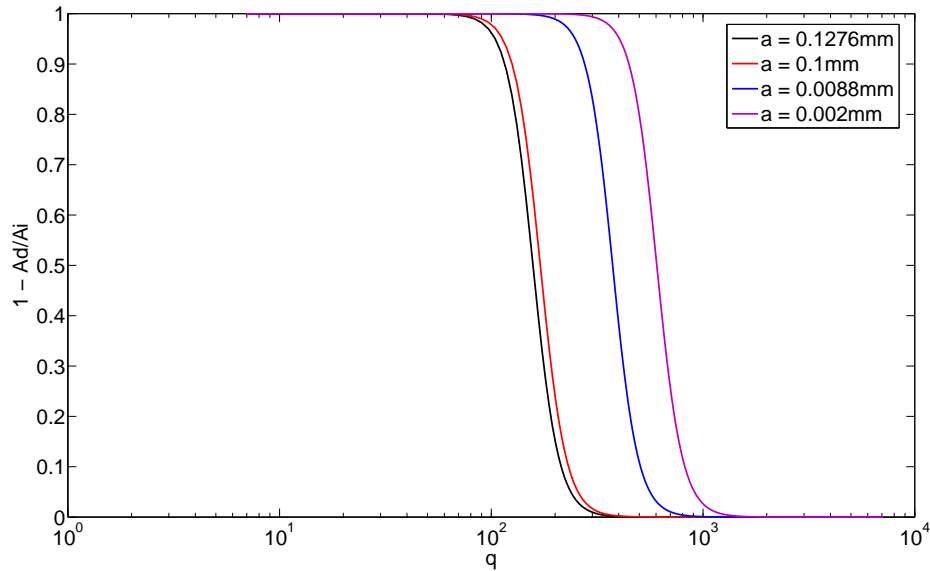


FIGURE 5.50: *Réduction d'amplitude $1 - A_d/A_i$ en fonction du vecteur d'onde q (mm) pour le sol 1-2*

Pour obtenir un résultat précis de la réduction de la déformation de la gomme, il faut appliquer la TRA séparément sur chaque zone en contact. Pour cela, la déformation de la gomme V doit être découpée sur chaque zone en contact et la TRA y est ensuite appliquée. Enfin, la déformation filtrée V_{fil} est reconstituée directement car les grandes longueurs d'onde ne sont jamais filtrées.

Cette méthode nécessite de prédire la création d'une zone de contact unique en lubrifié alors qu'elle est composée d'une multitude de zones de contact très proches dans le cas sec. Il est malheureusement très difficile de prédire cela de manière robuste, surtout dans les cas fortement chargés.

Le calcul numérique EHD sur une surface réelle reste possible mais engendre une difficulté numérique très importante.

Relation avec les propriétés matériau

Il est maintenant intéressant de comprendre quelles caractéristiques matériaux peuvent améliorer le coefficient de frottement.

- On sait que selon la TRA, la diminution du module E^* diminue la plage du filtre, favorise la déformation de la gomme et permet donc potentiellement de conserver l'adhérence d'un contact sec.

Concernant le coefficient de frottement, la loi développée par Heinrich emploie deux facteurs du matériau. Le premier est le module de perte qui, permettant la dissipation d'énergie, doit être le plus important possible pour avoir un coefficient de frottement élevé. Le second facteur est le module de stockage, présent dans le calcul de la contrainte normale σ_0 . Il doit être le plus faible possible, pour diminuer la contrainte normale totale et augmenter le coefficient de frottement.

Ces deux modules sont reliés de manière linéaire dans le coefficient de frottement, ainsi seul leur rapport conditionnera la valeur du coefficient de frottement. Ce rapport est le facteur de perte $\tan \delta$, reconnu unanimement dans la littérature pour être le facteur prédominant du coefficient de frottement. Le facteur de perte est généralement choisi faible pour des basses fréquences d'excitations et élevé pour les hautes, cela afin de permettre à la gomme d'avoir peu de résistance en roulement et d'avoir une forte adhérence en glissement.

Ainsi on peut dire qu'il faudrait privilégier un module de perte élevé et un module de stockage faible, afin d'avoir un facteur de perte élevé tout en ayant un module E^* faible.

Mais ce type de choix de matériau doit aussi être étudié en tenant compte de l'épaisseur du film d'eau. L'effet de la déformation au travers du film d'eau grâce à un matériau souple doit être contrebalancé avec l'effet d'un matériau rigide permettant d'avoir d'un film d'eau faible ou supprimé localement.

Il est néanmoins possible d'obtenir cet effet par l'emploi de modules de stockage et de perte relativement élevés tout en conservant la même valeur de facteur de perte. Un matériau rigide engendrera un taux de contact plus faible et une distribution des hauteurs en contact ciblées sur les sommets des cailloux de l'asphalte.

- La courbe 5.51 montre l'amplitude du module viscoélastique $|E^*|$ et du facteur de perte $\tan \delta$ en fonction de la fréquence d'excitation du matériau. Les petites fluctuations du facteur de perte sont dues au recalage des données originales sans logiciel adapté. On remarque que le maximum du facteur de perte se situe sur une plage de fréquences comprise entre 10^3 et 10^4 Hz ; l'amplitude du module viscoélastique tend vers un minimum pour les petites fréquences.

La table 5.8 donne les fréquences excitées en fonction de la vitesse de glissement Vg et du vecteur d'onde du sol q . On obtient une plage de fréquences d'excitations pour la plage des longueurs d'onde du sol qui ne sont pas filtrées, c-à-d $q = [10^1; 10^2 - 10^3]$. Les plages pour chaque Vg sont montrées en jaune et vert dans la figure 5.51. D'abord, on retrouve qu'à forte vitesse de glissement, le maximum de $\tan \delta$ est majoritairement excité par les grandes longueurs d'onde du sol. Ensuite, on remarque qu'à basse vitesse de glissement la plage d'excitation est bien plus grande qu'à haute vitesse en raison du phénomène de filtrage de plus en plus important.

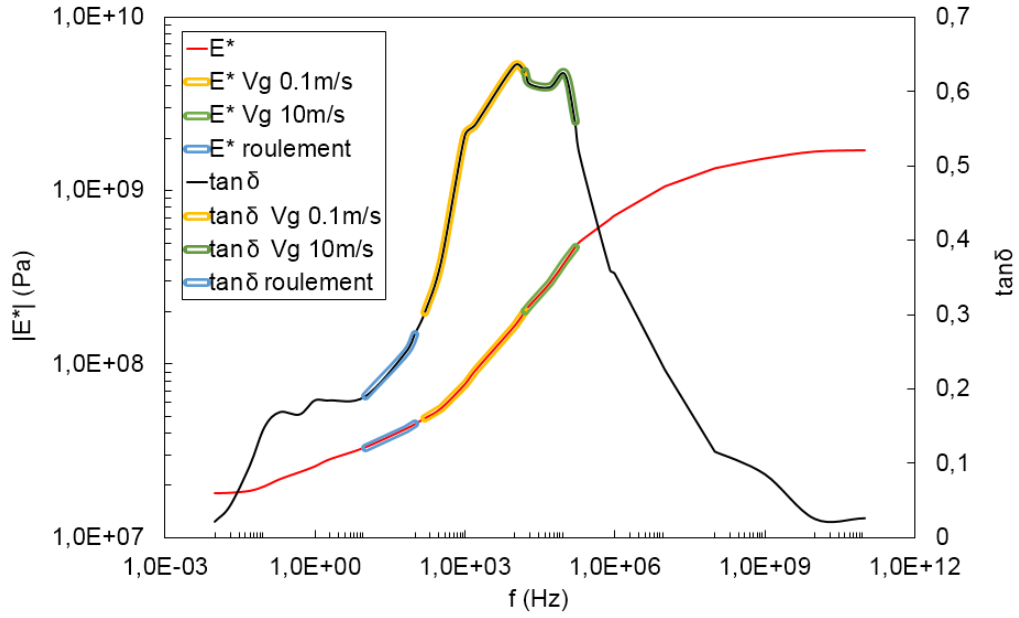


FIGURE 5.51: Amplitude du module viscoélastique $|E^*|$ (Pa) et facteur de perte $\tan \delta$ en fonction de la fréquence (Hz)

q	10^1	10^2	10^3	10^4
f à $Vg = 0.1m/s$	$160Hz$	$1.6kHz$	$16kHz$	$160kHz$
f à $Vg = 10m/s$	$16kHz$	$160kHz$	$1.6MHz$	$16MHz$

TABLE 5.8: Fréquence d'excitation en fonction de la vitesse de glissement pour différents vecteurs d'onde du sol q mm^{-1} .

Pour améliorer sensiblement l'adhérence sur sol mouillé, il faut que la plage du maximum du facteur de perte soit excitée à faible vitesse de glissement, pour profiter d'une plage plus importante qu'à haute vitesse. Or, la plage d'excitation de la gomme en roulement, surlignée en bleu, est de l'ordre de $[10; 100]Hz$. Elle se juxtapose à la plage d'excitation des basses vitesses de glissement de la gomme. Un décalage simple vers les basses fréquences des données matériaux actuelles, engendrerait une augmentation du facteur de perte dans la plage de roulement, donc une augmentation de la résistance au roulement du pneumatique. Cela montre que la marge de conception d'un matériau "idéal" est très réduite, puisqu'il faudrait des propriétés très discontinues entre la plage des fréquences en roulement et celle en glissement à basse vitesse de glissement.

Plus précisément, l'optimum serait que le matériau ait un faible facteur de perte dans la plage des fréquences en roulement. Puis, le facteur de perte passerait subitement à une valeur très importante et constante sur l'ensemble de la plage d'excitation à faible vitesse de glissement.

Concernant l'amplitude du module complexe viscoélastique $|E^*|$, il serait bénéfique qu'elle reste la plus faible possible pour favoriser la déformation de la gomme par la TRA. Néanmoins, dans le cas réel, c-à-d avec un rapport A_i/h important, il faudrait comparer l'effet de la transmission des pressions grâce à des rapports A_i/h importants, provenant d'un grand module $|E^*|$, avec l'effet de la TRA par un module $|E^*|$ faible.

Par conséquent, pour conserver un coefficient de frottement suffisant dans un contact lubrifié, un matériau utilisant les grandes longueurs d'onde du sol doit être privilégié. Au niveau du sol, il est démontré qu'un spectre important pour les grandes longueurs d'onde évitera le phénomène de lubrification.

5.5 Conclusion

Ce chapitre a décrit le contact du pain de gomme sur le sol routier à partir de mesures de deux types de sols. Une étude numérique a permis de relier certaines caractéristiques statistiques du sol avec leurs propriétés de contact.

L'application de la théorie de réduction d'amplitude a été traitée. Elle a montré que la diminution du coefficient de frottement est généralement plus importante pour un sol neuf que pour un sol usé. Une corrélation entre les propriétés des surfaces et celles du matériau a pu être effectuée. Ainsi, la TRA montre qu'il faut privilégier l'adhérence provenant des grandes longueurs d'onde du sol dans le choix du matériau. Ce choix doit néanmoins être comparé aux propriétés matériau nécessaires pour avoir une bonne transmission des pressions au travers du film de fluide.

Cette orientation va à l'encontre de ce qui est nécessaire pour diminuer la résistance au roulement et montre qu'il faut des propriétés matériau très difficiles à obtenir pour améliorer le compromis.

La forme de la diminution du coefficient de frottement par la lubrification provient majoritairement de la relation entre les propriétés matériau et le rôle de filtration du lubrifiant.

De plus, l'impact de la charge et celui la viscosité ont été exposés.

Pour la variation de la charge, la TRA utilisée n'est pas suffisamment aboutie pour prendre en compte l'augmentation de la déformation de la gomme due à la diminution de l'épaisseur du film d'eau.

L'impact de la viscosité dans le modèle utilisé semble réaliste puisque son impact est quantitativement proche du phénomène réel.

La complexité du contact réel rend l'application de la théorie délicate en raison de la multitude de contacts causés par la topologie du sol. Néanmoins, il est montré qu'un sol comprenant de nombreux contacts de petits rayons est favorable à la conservation de la déformation de la gomme en comparaison avec un sol composé de grands contacts.

Chapitre 6

Conclusion générale

L'adhérence sur sol mouillé est un élément primordial pour la sécurité des usagers de la route. L'amélioration de cette performance, tout en conservant un compromis global, nécessite d'améliorer la compréhension du phénomène d'adhérence sur sol mouillé. De nombreuses études ont montré que l'adhérence sur sol mouillé nécessitait de choisir les caractéristiques du matériau du pneumatique en accord avec les propriétés du sol routier et les conditions de contact. L'étude menée a pour but d'améliorer la compréhension du contact. Elle apporte une quantification des échelles du sol qui sont ineffectives sur sol mouillé.

L'étude se base sur une théorie permettant de prédire la diminution de l'amplitude de la rugosité dans des contacts EHD piezo-visqueux. Elle doit d'abord être modifiée et étendue pour être appliquée au domaine du contact pneumatique-chaussée humide. Un modèle de prédiction est ensuite créé.

Le chapitre 2 présente les équations principales du contact sec viscoélastique. Le modèle viscoélastique généralisé de Zener est appliqué aux techniques Multigrille et FFT afin d'avoir un outil rapide et efficace. Cet outil sert de base aux modèles de contact lubrifié utilisés par la suite.

Le chapitre 3 est une application de ces modèles au cas lubrifié ; l'équation de Reynolds et sa résolution y sont décrites. Son implémentation est associée aux techniques de calculs précédentes. L'utilisation de l'équation de Reynolds engendre une difficulté d'ordre numérique dans le cas viscoélastique et complique son utilisation pour des cas représentatifs du contact gomme-sol.

Le chapitre 4 repose sur les outils créés précédemment et étend la théorie de réduction d'amplitude au cas isovisqueux élastique mou. L'essai d'extension au cas viscoélastique est aussi présenté. La loi de réduction d'amplitude est établie analytiquement à partir de nombreux calculs numériques. Il devient possible de prédire la diminution de l'amplitude de la déformation due à la rugosité sur un matériau souple élastique.

Le chapitre 5 présente l'état de l'art du contact du pneumatique sur sol mouillé. La description de l'asphalte routier, les phénomènes expliquant la diminution de l'adhérence sur sol mouillé et les méthodes de calcul du coefficient de frottement émis par la littérature y sont décrits.

Suivant la même logique, de nombreuses mesures du sol routier sont effectuées. Leur description est établie d'une part, à partir de paramètres statistiques comme la dimension fractale et la rugosité quadratique et d'autre part, à partir d'une description globale comme la densité spectrale de puissance. Une corrélation a été établie entre ces deux types de paramètres. Une différenciation entre un asphalte neuf et un asphalte usé est ainsi possible.

Une étude de contact sec élastique numérique est effectuée sur chaque type de surface et montre la différence de comportement entre une route neuve et une route usée, notamment sur leur taux et raideur de contact. Il est montré qu'un sol neuf ayant un paramètre de rugosité quadratique important est plus propice à la conservation du contact sec en présence d'eau sur la route. De même, une corrélation a été établie entre certains paramètres statistiques et les propriétés du sol. Les résultats révèlent que l'hypothèse de contact complet est invalide, puisque le taux de contact est très faible. Il est donc choisi d'utiliser la déformation de la gomme comme base de calcul plutôt que la surface de la route.

La même étude est effectuée dans le cas viscoélastique, elle met en évidence, en outre, l'influence de la vitesse de glissement sur la distribution des hauteurs en contact.

Le calcul du coefficient de frottement est décrit. Il utilise certains résultats trouvés dans l'étude précédente afin d'améliorer sa précision. Un matériau viscoélastique représentatif des bandes de roulement des pneumatiques est employé.

Dans un cas simplifié d'une sphère rugueuse en glissement sur un massif viscoélastique, la théorie de réduction d'amplitude est vérifiée. Elle présente un bon comportement général mais montre ses limites vis-à-vis de la non prise en compte des grands rapports d'amplitude de rugosité sur l'épaisseur du film de fluide, ainsi que sur la non prise en compte de la viscoélasticité.

Par la suite, la théorie de réduction est appliquée au problème de contact gomme-sol afin d'étudier l'impact de chaque paramètre sur la réduction d'amplitude.

Tout d'abord, les hypothèses de cette théorie sont confrontées aux caractéristiques réelles du contact, permettant de montrer que leur majorité est applicable dans le cas réel.

L'application de la théorie montre une diminution du spectre de déformation de la gomme en fonction de la vitesse de glissement. Ainsi, il est montré une diminution progressive de la déformation de la gomme, depuis les petites longueurs d'onde jusqu'aux plus grandes, par l'augmentation de la vitesse de glissement.

Le calcul du coefficient de frottement montre une différence notable, pour chaque sol, entre le coefficient de frottement sur sol sec et sur sol mouillé. Le coefficient de frottement maximal sur sol mouillé est établi à des vitesses de glissement plus élevées que dans le cas sec. Cela est dû à la position du spectre du sol encore présent dans le frottement, situé sur les grandes longueurs d'onde du sol.

La diminution du coefficient de frottement est directement corrélée à la forme du spectre de la déformée de la gomme. La théorie démontre que ce sont les sols neufs qui perdent le plus leur adhérence ; néanmoins, elle reste souvent supérieure aux sols usés. Plus précisément, la théorie met en évidence que les sols ayant un coefficient de frottement provenant majoritairement des petites longueurs d'onde du sol sont ceux qui ont la plus grande perte d'adhérence.

De plus, la forme de la diminution du coefficient de frottement provient de la relation entre les propriétés matériau mises en jeu dans le frottement et la filtration du lubrifiant.

L'impact de la charge est étudié et montre que son accroissement augmente la diminution du coefficient de frottement entre le cas sec et le cas mouillé. Cependant, la non prise en compte du rapport de l'amplitude de la rugosité sur l'épaisseur du film de fluide dans la TRA doit relativiser les résultats obtenus.

La viscosité de l'eau est traitée dans le cas d'une augmentation à cause des polluants du sol et dans le cas d'une diminution par la chaleur dégagée par la bande de roulement. Sa variation engendre une

diminution du coefficient de frottement suivant le même ordre de grandeur, ce qui montre qu'elle est très importante. L'étude signale que les sols tirant en grande partie l'adhérence des petites longueurs d'onde sont encore les plus impactés.

Le rayon de contact employé dans le calcul de la TRA est étudié. L'étude numérique montre que le contact sur la surface d'un caillou est constitué d'une multitude de zones de contact. Ainsi la TRA doit être appliquée séparément sur chacune de ces zones.

La comparaison de contacts à pression équivalente, mais à rayon différent, indique qu'un petit rayon de contact favorise la déformation de la gomme au travers du film d'eau.

Enfin, l'étude montre quelles propriétés du matériau viscoélastique jouent dans l'adhérence sur sol mouillé en fonction de la vitesse de glissement. Ainsi, il est possible de faire correspondre les propriétés viscoélastiques avec le spectre non caché par la lubrification.

Perspectives

L'étude expérimentale apparaît comme évidente tant le problème est complexe et demande une vérification. Ainsi, des essais expérimentaux utilisant un matériau aux propriétés viscoélastiques ciblées sur certaines plages de fréquence et utilisant un fluide suffisamment visqueux pour rester en lubrification VEHD, devraient permettre de vérifier avec précision les résultats de la théorie.

Les perspectives concernant l'amélioration de la prédiction portent d'abord sur la théorie de réduction d'amplitude : trois points principaux sont à améliorer.

Le premier est la prise en compte de la viscoélasticité dans la théorie de réduction d'amplitude, puisque la pression due à la rugosité devient asymétrique, comme montré dans la section 5.4.2. La réduction d'amplitude variera selon le rapport entre le temps de relaxation du matériau et la vitesse de glissement.

Le second est la prise en compte d'amplitudes de rugosités supérieures à 10% de l'épaisseur du film de fluide. Ce facteur est très important puisque l'étude effectuée dans le chapitre 5 montre des différences de plus de 40% dans le calcul d' A_d/A_i . Il est évident que plus l'on va se placer à l'arrière du contact du pneumatique, plus l'épaisseur du film d'eau va diminuer, rendant le rapport amplitude de rugosité sur épaisseur du film très important. De plus, un contact de type mixte sera de plus en plus présent.

La prédiction de la TRA pourrait encore être améliorée si elle était étudiée en roulement-glissement, pour être plus proche des conditions réelles du contact.

L'application de la TRA doit être effectuée sur un contact continu, ce qui n'est pas le cas, même à l'échelle de la surface d'un caillou. Il faut mettre en place une méthode ciblant et appliquant la TRA sur chaque zone en contact continu, puis réassembler chaque zone pour recréer le sol filtré.

En dernière étape, la différenciation des zones de contact lubrifié avec celles en contact sec permettrait d'ajouter l'influence de l'adhérence par adhésion et de rendre la prédiction de la diminution du coefficient de frottement valable sur l'ensemble de la zone de contact de la bande de roulement. Il serait alors possible d'intégrer une sous-alimentation du contact après une zone de contact sec.

Bibliographie

- [AJ03] P. ANDRÉN et A. JOLKIN : Elastohydrodynamic aspects on the tyre-pavement contact at aquaplaning. *Swedish National Road and Transportation Research Institute*, 2003.
- [Bar91] C. BARUS : Note on the dependence of viscosity on pressure and temperature. *Am. Acad. of Arts and Science*, 28:13–18, 1891.
- [BBB⁺03] R. BUZIO, C. BORAGNO, F. BISCARINI, F. Buatier de MONGEOT et U. VALBUSA : The contact mechanics of fractal surfaces. *Nature Materials*, 2(4):233–236, 2003.
- [Bea12] Y. BEAUTRU : *Influence des films d'huile très minces sur le frottement pneu/chaussée*. Thèse de doctorat, École Centrale De Nantes, 2012.
- [BL90] A. BRANDT et A.A. LUBRECHT : Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *J. of Comp. Phys.*, 90:348 – 370, 1990.
- [BL07] E. BALMÈS et J.-M. LECLÈRE : *Viscoelastic Vibration Toolbox*. SDT Tools, 2007.
- [BLH08a] N BIBOULET, AA LUBRECHT et L. HOUPERT : Contact pressure in indented elasto-hydrodynamic contacts. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part J*, 222:415–421, 2008.
- [BLH08b] N BIBOULET, AA LUBRECHT et L. HOUPERT : Contact pressure of indented wide elliptical contacts : Dry and lubricated cases. *Journal of Tribology*, 140:1–7, 2008.
- [Bou85] J. BOUSSINESQ : *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. 1885.
- [BP02] Q.V. BUI et J.P. PONTHOT : Estimation of rubber sliding friction from asperity interaction modeling. *Wear*, 252:150–160, 2002.
- [Bra77] A. BRANDT : Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. *Mathematics of Computation*, 31:333 – 390, 1977.
- [Bra90] A. BRANDT : Rigorous local mode analysis of multigrid. In *Prelim. Proc. 4th Copper Mountain, Conference of MultiGrid Methods, Copper Mountain Colorado*, 1990.
- [COS07] JW CHOO, AV OLVER et HA. SPIKES : The influence of transverse roughness in thin film mixed elastohydrodynamic lubrication. *Tribology International*, 40:220–32, 2007.
- [CP04] G. CARBONE et B.N.J. PERSSON : Dewetting at soft viscoelastic interfaces. *Journal of Chemical Physics*, 121:2246–2252, 2004.
- [CP13] G. CARBONE et C. PUTIGNANO : A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials : theory and experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2013.
- [CVL06] AD CHAPKOV, CH VENNER et AA. LUBRECHT : Roughness amplitude reduction under non-newtonian ehd lubrication conditions. *Journal of tribology*, pages 753–760, 2006.
- [CYA⁺01] X. CLAEYS, J. YI, L. ALVAREZ, R. HOROWITZ, C. Canudas de WIT et L. RICHARD : Tire friction modeling under wet road conditions. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1794–1799, 2001.

- [DCYAL11] G. DUBOIS, J. CESBRON, H.P. YIN et F. ANFOSSO-LÉDÉE : Macro-scale approach for rough frictionless multi-indentation on a viscoelastic half-space. *Wear*, 272:69–78, 2011.
- [DH59] D. DOWSON et G. R. HIGGINSON : A numerical solution to the elasto-hydrodynamic problem. *Proc. IMechE, part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, pages 6 – 15, 1959.
- [DH66] D. DOWSON et G.R. HIGGINSON : *Elastohydrodynamical Lubrication, the fundamentals of roller and gear lubrication contacts*. Pergamon press, 1966.
- [EES99] CD ELCOATE, HP EVANS et RW. SNIDLE : Thin film, time dependent, micro-el solutions with real surface roughness. *Proceedings of the Leeds Lyon symposium on Tribology, Tribology Series*, 36:163–174, 1999.
- [Ehr] P. EHRET : Visoelastic contact on dry and lubricated surface. unpublished.
- [Els96] A.A. ELSHARKAWY : Visco-elastohydrodynamic lubrication of line contact. *Wear*, 1:45–53, 1996.
- [Ert39] A.M. ERTEL : Hydrodynamic lubrication based on new principles. *Akad. Nauk SSSR Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 3(2):41–52, 1939.
- [ES91] C. R. EVANS et R. W. SNIDLE : Inverse solution of reynolds’s equation of lubrication under point-contact elastohydrodynamic conditions. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 103:539 – 546, 1991.
- [Fal03] K. FALCONER : *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. Chichester, 2003.
- [Gat45] E.K. GATCOMBE : Lubrication characteristics of involute spur gears - a theoretical investigation. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 67:177 – 185, 1945.
- [GJ92] JA GREENWOOD et KL. JOHNSON : The behaviour of transverse roughness in sliding elastohydrodynamically lubrication contacts. *Wear*, 153:107–117, 1992.
- [GME94] JA GREENWOOD et GE. MORALES-ESPEJEL : The behaviour of small-amplitude waviness in transient rough contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering*, 208:121–132, 1994.
- [Gol80] J.M. GOLDEN : Hysteresis and lubricated rubber friction. *Wear*, 65:75–87, 1980.
- [Gol81] J.M. GOLDEN : A theory of wet road-tyre friction. *Wear*, 71:307–331, 1981.
- [Gop81] M. GOPALAN : Determination of the squeeze film thickness between sliding rubber and rough surfaces. *Wear*, 69:383–391, 1981.
- [GP92] A. GABELLI et G.W. POLL : Formation of lubricant film in rotary sealing contacts : Part 1 lubricant film modeling. *Journal of Tribology*, 114:280, 1992.
- [Gra67] G.A.C. GRAHAM : The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the contact area has any number of maxima and minima. *International Journal of Engineering Sciences*, 5:409, 1967.
- [Gre10] J.A. GREENWOOD : Contact between an axisymmetric indenter and a viscoelastic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52:829–835, 2010.
- [Gro63] K.A. GROSCH : The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber. *Proceedings of the Royal Society of London*, 274:21–39, 1963.
- [Gro69] K.A. GROSCH : The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds. *Rubber Chemistry and Technology*, 1996:495–568, 1969.
- [Gro07] K.A. GROSCH : Rubber friction and its relation to tire traction. *Rubber Chemistry and Technology*, 80:379–411, 2007.

- [GS12] I.G. GORYACHEVA et A.G. SHPENEV : Modelling of a punch with a regular base relief sliding along a viscoelastic foundation with a liquid lubricant. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 76, 76:582–589, 2012.
- [GT58] J.A. GREENWOOD et D. TABOR : *Proc. Phys. Soc.*, 71:989, 1958.
- [HD76] B.J. HAMROCK et D. DOWSON : Isothermal elastohydrodynamic lubrication of points contacts, part i \tilde{U} theoretical formulation. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 98:223 \tilde{U} 229, 1976.
- [Her81] H. HERTZ : On the contact of elastic solids. *J. Reine und Angew. Math.*, 92:292 \tilde{U} 302, 1881.
- [HK00] G. HEINRICH et M. KLÜPPEL : Rubber friction on self-affine road tracks. *Rubber Chemistry and Technology*, 73:578–606, 2000.
- [HK08] G. HEINRICH et M. KLÜPPEL : Rubber friction, tread deformation and tire traction. *Wear*, 265:1052–1060, 2008.
- [HL96] C.J. HOOKE et K.Y. LI : Elastohydrodynamic lubrication of soft solids. *Proceedings of Leeds Lyon Symposium on Tribology, Elsevier Tribology Series*, 32:185—197, 1996.
- [HL06] C.J. HOOKE et K.Y. LI : Rapid calculation of the pressures and clearances in rough ehl contacts, part 1. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part C*, 220:901–914, 2006.
- [HO72] C.J. HOOKE et O'DONOGHUE : Elastohydrodynamic lubrication of soft, highly deformed contacts. *Journal Mechanical Engineering Science*, 14 (1):34–48, 1972.
- [Hoo99] C.J. HOOKE : The behaviour of low-amplitude surface roughness under line contacts. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, part J*, 213:275–286, 1999.
- [Hoo06] C.J. HOOKE : Roughness attenuation and pressure rippling in ehl contacts. *IUTAM Symposium on EHL and MicroEHL, Springer*, 220:411–422, 2006.
- [HS07] P.C. HADINATA et L.S. STEPHENS : Soft elastohydrodynamic analysis of radial lip seals with deterministic microasperities on the shaft. *Journal of Tribology*, 129:851–860, 2007.
- [HV00] C.J. HOOKE et CH. VENNER : Surface roughness attenuation in line and point contacts. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part J*, 214:434–444, 2000.
- [HV06] C.J. HOOKE et CH. VENNER : Surface roughness attenuation in ehl line and point contact under conditions of starved lubrication. *IUTAM Symposium on EHL and MicroEHL, Springer*, 220:59–70, 2006.
- [JGH85] K.L. JOHNSON, J.A. GREENWOOD et J.G. HIGGINSON : The contact of elastic regular wavy surfaces. *International Journal of Mechanics Science*, 27 (6):383–396, 1985.
- [Joh85] K.L. JOHNSON : *Contact mechanics*. CUP Cambridge, 1985.
- [KCD⁺08] I.F. KOZHEVNIKOV, J. CESBRON, D. DUHAMEL, H.P. YIN et F. ANFOSSO-LÉDÉE : A new algorithm for computing the indentation of a rigid body of arbitrary shape on a viscoelastic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50:1194 \tilde{U} 1202, 2008.
- [KLR06] H. B. KHENOUS, P. LABORDE et Y. RENARD : A comparison of two approaches for the discretization of elastodynamic contact problems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 342, 342:791–796, 2006.
- [KNKM96] M. KANETA, H. NISHIKAWA, T. KANADA et K. MATSUDA : Abnormal phenomena appearing in ehl contacts. *Journal of Tribology*, 118:886–892, 1996.

- [KNM06] M KANETA, H. NISHIKAWA et K. MATSUDA : Behaviour of transverse ridges passing through a circular ehl conjunction. *IUTAM Symposium on Elastohydrodynamics and Microelastohydrodynamics*,, pages 189–200, 2006.
- [Koe84] R.C. KOELLER : Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 51:299–307, 1984.
- [KSN93] M KANETA, T SAKAI et H. NISHIKAWA : Effect of surface roughness on point contact ehl. *Tribology Transactions*, 36:605–612, 1993.
- [Kud00] I.I. KUDISH : Formulation and analysis of ehl problems for soft materials. *Journal of Tribology*, 122:705–710, 2000.
- [Kud13] I.I. KUDISH : Asymptotic analysis of lubricated heavily loaded point contacts. *Lubrication Science*, 2013.
- [KV88] AFC KANTERS et M. VISSCHER : Lubrication of reciprocation seals : expriments on the influence of surface roughness on friction and leakage. *Proc. Leeds Lyon Symposium on Tribology, Elsevier Tribology Series*, 15:69–77, 1988.
- [LGK08] A. LE GAL et M. KLÜPPEL : Investigation and modelling of rubber stationary friction on rough surfaces. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 20:1–13, 2008.
- [LGVG98] AA. LUBRECHT, D. GRAILLE, CH. VENNER et JA. GREENWOOD : Waviness amplitude reduction in ehl line contacts under rolling sliding. *Journal of Tribology, ASME*, 120: 705–709, 1998.
- [LGYK05] A. LE GAL, X. YANG et M. KLÜPPEL : Evaluation of sliding friction and contact mechanics of elastomers based on dynamic-mechanical analysis. *The Journal of Chemical Physics*, 123:1–11, 2005.
- [LP12] B. LORENZ et B.N.J. PERSSON : Time-dependent fluid squeeze-out between solids with rough surfaces. *The European Physical Journal*, 32:281–290, 2012.
- [LR55] E.H. LEE et J.R.M. RADOK : Stress analysis in viscoelastic bodies. *Quart. Appl. Math.*, 13:183–190, 1955.
- [LR60] E.H. LEE et J.R.M. RADOK : The contact problem for viscoelastic bodies. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, 27:438–444, 1960.
- [LS90] van H.J. LEEUWEN et M.J.L. STAKENBORG : Visco-elastohydrodynamic (vehd) lubrication in radial lip seals : Part 2- fluid film formation. *Transaction of the ASME*, 112:584–592, 1990.
- [Lub87] A. A. LUBRECHT : *Numerical Solution of the EHL Line and Point Contact Problem Using Multigrid Techniques. Thèse de doctorat, ISBN 90-9001583-3*. Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, ISBN 90-9001583-3, 1987.
- [LV99] A.A. LUBRECHT et C.H. VENNER : Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part J*, 213:397–404, 1999.
- [Man55] J. MANDEL : Sur les corps viscoélastiques linéaires à comportement linéaire. *C. R. Acad. Sc., Paris*, 241:1910–1912, 1955.
- [Man66] J. MANDEL : *Cours de mécanique des milieux continus. Tome II*. Gauthiers-Villars, Paris, France, 1966.
- [Mar16] H.M. MARTIN : Lubrication of gear teeth. *Engineering, London*, 102:199–204, 1916.
- [MB71] H. MOES et R. BOSMA : Design charts for optimum bearing configuration, i the full journal bearing. *ASME Journal of Tribology*, 93:302–306, 1971.
- [MFSS10] C. MYANT, M. FOWELL, H.A. SPIKES et J.R. STOKES : An investigation of lubricant film thickness in sliding compliant contacts. *Tribology Transactions*, 53:684–694, 2010.

- [MG74] D.F. MOORE et W. GEYER : A review of hysteresis theories for elastomers. *Wear*, 30:1–34, 1974.
- [Moe69] H. MOES : Discussion on a contribution by k. jacobson and h. christensen. *Tribology Convention, Gothenburg, Proc. IMechE.*, 183:205–206, 1969.
- [Moe00] H. MOES : *Lubrication and beyond*. University of Twente, Enschede, 2000.
- [Moo64] D. MOORE : Drainage criteria for runway surface roughness. *Royal Aeronautical Society*, 1964.
- [Moo72] D.F. MOORE : *The Friction and Lubrication of Elastomers*. 1972.
- [Moo75] D.F. MOORE : The elastohydrodynamic transition speed for spheres sliding on lubricated rubber. *Wear*, 35:159–170, 1975.
- [MSICL12] F. MORA, P. SAINOT, Y. le CHENADEC et AA LUBRECHT : Lubrication of 2d soft elastohydrodynamic contacts : Extension of the amplitude reduction theory. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part J*, 226(9):769–774, 2012.
- [PACD08] C. PUTIGNANO, L. AFFERRANTE, G. CARBONE et G. DEMELIO : A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 49:338–343, 2008.
- [Pan07] X.D. PAN : Wet sliding friction of elastomer compounds on a rough surface under varied lubrication conditions. *Wear*, 262:707–717, 2007.
- [PAT⁺05] B.N.J. PERSSON, O. ALBOHR, U. TARTAGLINO, A.I. VOLOKITIN et E. TOSATTI : On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *J. Phys. : Condens. Matter*, 2005.
- [PBGV08] L. PÁLFI, N. BÉKÉSI, T. GODA et K. VARADI : Fe simulation of the hysteretic friction considering the surface topography. *Mechanical Engineering*, 52:83–91, 2008.
- [PC78] N. PATIR et H.S. CHENG : An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Transaction of the ASME*, 100:12–17, 1978.
- [PC79] N. PATIR et H.S. CHENG : Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. *Tran*, 101:220–229, 1979.
- [Pep38] W. PEPPLER : *Druckübertragung an geschmierten zylindrischen Gleitund Wälzflächen*. VDI-Verlag, 1938.
- [Per01] B.N.J. PERSSON : Theory of rubber friction and contact mechanics. *Journal of Chemical Physics*, 115(8):3840–3861, 2001.
- [Pet51] A.I. PETRUSEVICH : Fundamental conclusions from the contact-hydrodynamic theory of lubrication. *Izv. Akad. Nauk. SSSR (OTN)*, 2:209, 1951.
- [PGBQ92] G. POLL, A. GABELLI, P.G. BINNINGTON et J. QU : *Dynamic mapping of rotary lip seal lubricant films by fluorescent image processing*. Springer, 1992.
- [PGV11] L. PÁLFI, T. GODA et K. VARADI : Theoretical prediction of hysteretic rubber friction in ball on plate configuration by finite element method. *Express Polymer Letters*, 3:713–723, 2011.
- [PGV⁺12] L. PÁLFI, T. GODA, K. VARADI, E. GARBAYO, J.M. BIELSA et M.A. JIMÉNEZ : Fe prediction of hysteretic component of rubber friction. *Advance in Tribology*, page 12, 2012.
- [Pop10] V.L. POPOV : *Contact Mechanics and Friction, Physical Principles and Applications*. Springer, 2010.
- [PTAT05] B.N.J. PERSSON, U. TARTAGLINO, O. ALBOHR et E. TOSATTI : Rubber friction on wet and dry road surface the sealing effect. *Nat. Mater. at press*, 2005.

- [Rad57] J.R.M. RADOK : Visco-elastic stress analysis. *Quarterly Applied Mathematics*, 15: 198–202, 1957.
- [Rei] M. REINER : The Deborah number. Fourth International Congress on Rheology, 1964.
- [Rey86] O. REYNOLDS : On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp's tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London*, 177:157–234, 1886.
- [RM73] A.F. RANA et F.J. MILLERA : Compressibility of water as a function of temperature and pressure. *Journal of Chemical Physics*, 59, 1973.
- [Rob77] A.D. ROBERTS : Studies of lubricated rubber friction, part1 : Coupling optical observations to friction measurements. *Tribology International*, pages 115–122, 1977.
- [Roe66] C.J.A. ROELANDS : *Correlation aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils*. Thèse de doctorat, Technical University of Delft, The Netherlands, 1966.
- [Roh76] S.M. ROHDE : On the effect of pavement microtexture on thin film traction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 18:95–101, 1976.
- [RSNJ01] A. RANA, R. SAYLES, G. NIKAS et I. JALISI : An experimental technique for investigating the sealing principles of reciprocating elastomeric seals for use in linear hydraulic actuator assemblies. 2001.
- [Sal07] R.F. SALANT : Progress towards a realistic numerical model for elastomer reciprocating seals. *Sealing Technology*, 1:7–11, 2007.
- [SAP10] T. SCHMIDT, M. ANDRE et G. POLL : A transient 2d-finite-element approach for the simulation of mixed lubrication effects of reciprocating hydraulic rod seals. *Tribology International*, 43:1775–1785, 2010.
- [Sav65] A.R. SAVKOOR : On the friction of rubber. *Wear*, 8:222, 1965.
- [Sch78] R.A. SCHAPERY : Analytical models for the deformation and adhesion components of rubber friction. *Tire Science and Technology*, 6 (1):3–47, 1978.
- [Sch02] E.J. SCHRAMM : *Reibung von Elastomeren auf rauen Oberflächen und Beschreibung der Nassbremsseigenschaften von PKW-Reifen*. Thèse de doctorat, Universität Regensburg, 2002.
- [SDC11] M. SCARAGGI, D. DINI et G. CARBONE : Friction measurements of micro-ehl in rough contacts. 2011.
- [Sid09] E. SIDICK : Power spectral density specification and analysis of large optical surfaces. *Proc. SPIE, Modeling Aspects in Optical Metrology II*, 7390, 2009.
- [SKE08] A. SHINKARENKO, Y. KLIGERMAN et I. ETSION : The effect of surface texturing in soft elasto-hydrodynamic lubrication. *Tribology International*, 42:284–292, 2008.
- [SKE09] A. SHINKARENKO, Y. KLIGERMAN et I. ETSION : The validity of linear elasticity in analyzing surface texturing effect for elasto-hydrodynamic lubrication. *Journal of Tribology*, 131:1–7, 2009.
- [SKH10] P. SPERKA, I. KRUPKA et M. HARTL : Experimental study of real roughness attenuation in concentrated contacts. *Tribology International*, 43:1893–1901, 2010.
- [SKH11] P. SPERKA, I. KRUPKA et M. HARTL : Experimental study of real roughness attenuation in rolling/sliding concentrated contacts. *Tribology International*, 46:14–21, 2011.
- [Skr93] Jacek J. SKRZYPEK : *Plasticity and Creep*. Begell House-C.R.C. Press, 1993.
- [SL05] W.J. SIM et S.H. LEE : Finite element analysis of transient dynamic viscoelastic problems in time domain. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19 (1):61–71, 2005.

- [Spe11] P. SPERKA : Experimental study of artificial features attenuation in rolling sliding concentrated contacts. *In International Joint Tribology Conference*, Los Angeles, 2011. ASME-STLE.
- [SS00a] F. SHI et R.F. SALANT : A mixed soft ehl model with inter-asperity cavitation and surface shear deformation. *Transaction of the ASME*, 122:308–316, 2000.
- [SS00b] F. SHI et R.F. SALANT : A mixed soft elastohydrodynamic lubrication model with interasperity cavitation and surface shear deformation. *Journal of tribology ASME*, 122:308–316, 2000.
- [SYT10] R.F. SALANT, B. YANG et A. THATTE : Simulation of hydraulic seals. *Journal of Engineering Tribology*, 224:865–876, 2010.
- [Tin66] T.C.T. TING : The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space. *Journal of Applied Mechanics* *Transactions of the ASME*, 35:845–854, 1966.
- [TR13] TIRE-RACK : Air pressure vs. wet performance, 05 2013.
- [TS09a] A. THATTE et Richard F. SALANT : Elastohydrodynamic analysis of an elastomeric hydraulic rod seal during fully transient operation. *Journal of Tribology*, 131:031501–1 – 031501–11, 2009.
- [TS09b] A. THATTE et Richard F. SALANT : Transient ehl analysis of an elastomeric hydraulic seal. *Tribology International*, 42:1424–1432, 2009.
- [TS10] A. THATTE et Richard F. SALANT : Visco-elastohydrodynamic model of a hydraulic rod seal during transient operation. *Journal of Tribology*, 132:041501–1 – 041501–13, 2010.
- [TS12] A. THATTE et R.F. SALANT : Effects of multi-scale viscoelasticity of polymers on high-pressure, high-frequency sealing dynamics. *Tribology International*, 52:75–86, 2012.
- [TY81] P. TANEERANANON et W.O. YANDELL : Microtexture roughness effect on predicted road-tyre friction in wet conditions. *Wear*, 69:321–337, 1981.
- [Ven] C.H. VENNER : unpublished, private discussion.
- [Ven91] C.H. VENNER : *MultiLevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1991.
- [VL99] C.H. VENNER et A.A. LUBRECHT : Amplitude reduction of non-isotropic harmonic patterns in circular ehl contacts, under pure rolling. *Tribology Series*, 36:151–162, 1999.
- [VL00a] C.H. VENNER et A.A. LUBRECHT : Multigrid techniques : a fast and efficient method for the numerical simulation of elastohydrodynamically lubricated point contacts. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part J*, 214:43–62, 2000.
- [VL00b] C.H. VENNER et A.A. LUBRECHT : *MultiLevel Methods in Lubrication*, volume 37. Elsevier Tribology Series, 2000.
- [WA70] D.J. WHITEHOUSE et J.F. ARCHARD : The properties of random surfaces of significance in their contact. *Proceedings of the Royal Society of London*, 316:97–121, 1970.
- [WLF55] M.L. WILLIAMS, R.F. LANDEL et J.D. FERRY : The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77(14):3701–3707, 1955.
- [WN07] P. WRIGGERS et J. NETTINGSMEIER : Homogenization and multi-scale approaches for contact problems. *Computational Contact Mechanics*, 498:129–161, 2007.
- [WR09] P. WRIGGERS et J. REINELT : Multi-scale approach for frictional contact of elastomers on rough rigid surfaces. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1996–2008, 2009.

- [WT69] K.B. WALLACE et D.H. TROLLOPE : Water pressure beneath a skidding tyre. *Wear*, 13:109–118, 1969.
- [WVL11] J. WANG, CH VENNER et AA LUBRECHT : Amplitude reduction in ehl line contacts under rolling sliding conditions. *Journal of Tribology, ASME*, 120:705–709, 2011.
- [Yan68] W.O. YANDELL : A mathematical simulation of hysteretic sliding friction. *Australian Road Research Board Conference Proceedings*, 5:1495–1511, 1968.
- [Yan71] W.O. YANDELL : A new theory of hysteretic sliding friction. *Wear*, 17:229–244, 1971.
- [Yan72] W.O. YANDELL : The part played by micro-texture in skidding resistance. *Australian Road Research Board Conference Proceedings*, 6:55–66, 1972.
- [YG75] W.O. YANDELL et M.K. GOPALAN : Methods of measuring and characterising the surface geometry of road stones. *Wear*, 37, 1975.
- [ZH01] D. ZHU et Y.Z. HU : A computer program package for the prediction of ehl and mixed lubrication characteristics, friction, surface stresses and flash temperatures based on measured 3d surface roughness. *Tribology Transactions*, 44:383–390, 2001.

Annexe A

Étude de la convergence du code de calcul VEHD

Cette annexe explique le déroulement de l'étude visant à améliorer la robustesse du code de calcul VEHD transitoire.

- D'abord la résolution correcte de l'équation de déformation en contact sec viscoélastique a été vérifiée. Pour cela, le coefficient de correction de la pression a montré que le code de calcul résolvait l'erreur en une seule relaxation. Cette application a présenté d'excellents résultats pour le contact sec mais pas de résultats notables sur le contact lubrifié. En préambule, une étude des coefficients d'influence κ réels a été menée. Ils sont calculés autour de deux relaxations et du calcul de la hauteur de film sur un point donné. La formule pour le calcul d'un coefficient d'influence est présentée dans l'équation A.1. Les coefficients d'influence ne varient pas en fonction du temps mais seulement en fonction du rapport montré dans l'équation 3.20 et du pas d'espace ΔX . Le coefficient de correction de la pression semble ainsi correct.

$$\kappa_{i,j} = \frac{\tilde{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j}}{\delta_{i,j}} \quad (\text{A.1})$$

- Afin que le calcul ne diverge pas dès le démarrage, l'initialisation par une hauteur d'enfoncement H_0 proche de la solution finale est nécessaire. L'introduction de la viscoélasticité nécessite alors une nouvelle relation reliant la hauteur d'enfoncement H_0 aux caractéristiques du contact et du matériau. Pour tenir compte du module viscoélastique du matériau non relaxé au démarrage du calcul, il faut modifier les variables adimensionnées a et M qui utilisent le module du matériau à l'état totalement relaxé (nommé $t = \infty$).

La hauteur centrale d'un film de fluide dans un cas isovisqueux élastique est donnée par Venner [Ven91] :

$$H^{ei} = 1.96 (2/3)^{\frac{2}{3}} M^{-7/9} \quad (\text{A.2})$$

donnant ainsi l'enfoncement élastique H_0 dû à une déformation élastique de -1 au centre de la sphère :

$$H_0^{ei} = -1 + 1.96 (2/3)^{\frac{2}{3}} M^{-7/9} \quad (\text{A.3})$$

À partir du chapitre précédent, on peut montrer que le module viscoélastique à l'état initial $E(t = 0)$ est égal au module viscoélastique à l'état totalement relaxé K multiplié par le rapport entre ces deux modules $f + 1$:

$$E(t = 0) = K \cdot (f + 1) = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0} \left(\frac{E_0}{E_1} + 1 \right) = \frac{1}{f + 1} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi la déformation viscoélastique vaut :

$$U_v(t=0) = \frac{a^2(t=0)}{R} = \frac{a^2(t=\infty)}{R} \left(\frac{1}{f+1} \right)^{2/3} \quad (\text{A.5})$$

Avec a rayon de contact adimensionné par rapport au temps infini, on a alors $a^2(t=\infty)/R = 1$.

Enfin, il faut aussi faire ressortir la partie viscoélastique induite dans le paramètre M de Moes :

$$\begin{aligned} M(t=0) &= \frac{w}{E'(t=0) \cdot R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{E'(t=0) \cdot R_x} \right)^{-3/4} \\ \Rightarrow M(t=0) &= \frac{w}{E'(t=\infty) \cdot (f+1) \cdot R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{E'(t=\infty) \cdot (f+1) \cdot R_x} \right)^{-3/4} \\ &\Rightarrow M(t=0) = \frac{M(t=\infty)}{(f+1)^{1/4}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On peut alors trouver l'enfoncement pour un cas VEHD avec un matériau non relaxé à $t=0$ en remplaçant les termes de l'équation A.3 par A.5 et A.6 :

$$H_0^{vi} = - \left(\frac{1}{f+1} \right)^{2/3} + 1.96 (2/3)^{2/3} M^{-7/9} (f+1)^{7/36} \quad (\text{A.7})$$

- Pour les mêmes raisons de convergence que l'enfoncement H_0 , le champ de pression initial doit être adapté au matériau non relaxé. L'initialisation du calcul s'effectue généralement dans le cas élastique par l'adoption d'un champ de pression d'un cas sec hertzien. Afin de donner une initialisation la plus proche possible de la solution convergée, le champ de pression va conserver une forme parabolique correspondant au cas sec mais en remplaçant son rayon de contact a et son amplitude p_h par leurs valeurs pour un matériau viscoélastique non relaxé :

$$\begin{aligned} p_h(t=0) &= p_h(t=t_\infty) \cdot (f+1)^{2/3} \\ a(t=0) &= a(t=t_\infty) \cdot \frac{1}{f+1}^{1/3} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On trouve alors :

$$P(X, Y) = \begin{cases} (f+1)^{2/3} \sqrt{1 - X/a_v^2 - Y/a_v^2}, & \text{si } X^2 + Y^2 \leq a_v^2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

avec $a_v = 1/(f+1)^{1/3}$.

L'emploi de cette initialisation permet de diminuer fortement le premier résidu pour les cas éloignés du cas élastique, c-à-d avec de très grands rapports entre les modules viscoélastiques $f+1$.

- Des résidus importants peuvent être présents à la frontière de la zone de cavitation comme montré dans la figure 3.3. Ces résidus sont régulièrement obtenus sur les grilles les plus fines. Cette constatation a conduit à créer une prérelaxation qui a pour but de diminuer le résidu dans une zone très ciblée. La prérelaxation s'effectue une ou plusieurs fois avant la relaxation de la grille complète. Elle cible la frontière de cavitation et effectue des relaxations simples de type Jacobi sur le point situé à la frontière de la cavitation ainsi que sur plusieurs points autour de cette frontière. Leur nombre est généralement compris entre 4 et 8. Cette méthode permet d'améliorer la convergence mais dans une mesure trop faible par rapport aux exigences du problème.

- Lors d'une modélisation démarrant avec un matériau non-relaxé et donc très rigide, des pics de pression très élevés et des effets transitoires très prononcés apparaissent. Ils amplifient fortement les oscillations des variables P et H et donc compliquent la convergence de l'équation de Reynolds. Un calcul a été implémenté avec un matériau totalement relaxé au démarrage, permettant d'avoir une solution en régime permanent lorsque la pression reste constante, annulant ainsi toute fluctuation importante des variables. Ainsi, l'enfoncement initial H_0 et l'initialisation de la pression sont identiques au cas élastique. Cette technique doit permettre aussi de vérifier que le problème est bien conditionné. Comme le matériau est totalement relaxé, la valeur des matrices de déformation viscoélastique et élastique sont identiques entre elles, et le sont aussi au cas élastique : $U_e = U_v$.

La première étape consiste à créer le matériau totalement relaxé par un calcul lubrifié élastique en régime permanent. Un sous-programme permet de transférer ces données afin de créer un matériau viscoélastique totalement relaxé. Vient ensuite un calcul lubrifié viscoélastique en régime permanent à partir du matériau obtenu. Enfin, le régime transitoire est ajouté.

Dès l'introduction de cette dernière séquence, le calcul diverge lors des relaxations sur les grilles grosses pour des cas avec de petits M (≤ 50). Le maintien sur des grilles fines, c-à-d la suppression du MultiGrille ne crée pas de divergence. Dans les cas où M est grand (≥ 500), la divergence démarre dès le régime permanent viscoélastique. Par contre, pour des cas M très petits ($M = 2$), avec une discrétisation faible ou importante (256^2 à 1024^2 pts), la solution converge dans les parties en régimes permanent et transitoire viscoélastique.

Cette vérification a révélé que le couplage viscoélasticité/MultiGrille lubrifié n'est pas fonctionnel. En effet, la même démarche a été effectuée dans un cas de contact sec ; le passage de l'élastique au viscoélastique a été totalement transparent ; les résidus ont continué leur diminution lors de la transition élastique/viscoélastique, même en utilisant la technique MultiGrille.

- Pour des raisons habituelles de stabilité, le choix du pas de temps est généralement choisi identique au pas d'espace de la grille fine : $\Delta T = \Delta X^h$. Il va donc être vérifié si ce choix a un impact sur la convergence du calcul. La procédure s'établit ainsi :

- la solution convergée est atteinte ($r \leq 10^{-6}$) en élastique pour créer un matériau viscoélastique totalement relaxé suivant la méthode du point précédent ;
- le calcul passe en viscoélastique monogrille (sur la grille fine) pour ne pas diverger ;
- une perturbation est créée au point central en augmentant la pression de 10% sur la grille fine ;
- au même moment, le pas de temps ΔT est modifié uniquement dans la discrétisation temporelle des équations servant à la relaxation 3.18, 3.19. Par contre, il ne faut pas modifier les caractéristiques matériau présentes dans la relaxation comme l'équation 3.20, ni la discrétisation temporelle de l'équation de Reynolds.

Le calcul reprend les conditions $M = 200$ et $f = 9$. Le résidu au point central après la perturbation est de 122 ; il passe à une valeur inférieure à 10^{-10} en moins de 3 relaxations pour un rapport $\Delta T/\Delta X \leq 1$ en monogrille. Dans le cas $\Delta T/\Delta X \geq 1$, il faut un peu plus de 5 relaxations pour atteindre le même niveau de résidu.

La même procédure va être appliquée mais avec un calcul MultiGrille après la perturbation. À partir d'un certain nombre de niveaux, on constate une divergence sur la grille grosse. Pour une grille fine de 1024^2 points, il peut être utilisé au maximum 5 niveaux, c'est-à-dire 64^2 points sur la plus grille grosse. Au-delà de 5 niveaux, on observe une divergence de la grille grosse. À partir de grilles fines moins denses, le phénomène s'atténue ; pour une grille fine de 256^2 points, on peut utiliser jusqu'à 3 niveaux, soit une grille grosse de 16^2 points.

En conclusion, la taille de la grille grosse ainsi que le rapport entre la grille fine et la grille grosse influent fortement sur la convergence du code.

- Suspectant la partie transitoire implémentée dans le code MultiGrille lubrifié, une étude de la discrétisation *NU2* a été menée. Pour cela, le choix entre ΔX et ΔT a été bloqué, ce qui maintient le même type de discrétisation sur toutes les grilles.

Dans le cas où toutes les grilles sont bloquées sur $\Delta X \leq \Delta T$, correspondant à une discrétisation type grille fine, pour un calcul 5 niveaux (32 jusqu'à 512) avec $M = 200$ et $f = 9$; le calcul diverge à partir du troisième niveau en régime transitoire.

Pour le cas opposé où toutes les grilles sont bloquées avec $\Delta X > \Delta T$, il y a divergence uniquement sur la grille la plus grosse en régime transitoire. En régime permanent, il y a une divergence dès le départ du calcul (sur la grille fine).

La même méthode a été appliquée sur un calcul convergé, afin de partir sur de faibles résidus; les problèmes de convergence n'ont pas changé. Cette étude ne permet donc pas de conclure sur un problème provenant de la discrétisation *NU2*.

- Le régime permanent de Reynolds est généralement plus stable que le transitoire, car le terme de *squeeze* entraîne plus de perturbations. L'équation de Reynolds a été maintenue en régime permanent pour vérifier son implication dans la convergence. Même pour des cas relativement faciles, l'introduction de la viscoélasticité peut faire diverger le calcul sur la grille grosse.

- Les contacts VEHD ou viscoélastique sec n'ont pas d'adimensionnement du temps t . En effet, un adimensionnement du temps tel que $T = t/\bar{t}$ et de la constante de temps du matériau viscoélastique tel que : $\bar{\tau} = \tau/\bar{t}$ est inutile puisque le temps t est toujours écrit sous forme de rapport avec la constante de temps τ dans les équations provenant de la déformation viscoélastique. De plus, il a été montré que le choix du pas de temps n'influe pas également sur le problème.

- La simulation de cas fortement chargés en élastique isovisqueux a été peu étudiée. Pour connaître quel type de relaxation il faut utiliser, le couplage entre les différents termes de l'équation de Reynolds doit être compris. Le cas fortement chargé (M élevé) présente un rapport entre la déformation et la hauteur de film très important, pouvant dépasser les 1000. Ainsi, pour de tels cas, les termes de l'équation de Reynolds vont interagir de manière différente que dans un cas faiblement chargé. Pour étudier ce couplage, la méthode MultiGrille algébrique a été employée pour des cas de M allant de 10 à 10000. Les cas de $M = 100$ et de $M = 10000$ sont présentés dans les figures A.1 et A.2. Le domaine dans les deux cas est de 1.5×1.5 . Pour $M = 100$, le calcul utilise 6 niveaux allant de 16^2 à 512^2 , et pour $M = 10000$ 5 niveaux allant de 64^2 à 1024^2 .

Le couplage est représenté lorsqu'apparaissent des lignes continues dans une direction bien précise, comme c'est le cas pour $M = 100$. Ce n'est cependant pas le cas pour $M = 10000$, où aucune direction prédominante n'est clairement mise en évidence dans la zone haute pression. Aucune technique de résolution particulière n'émerge.

- En parallèle des différentes méthodes testées, une stratégie de convergence en "douceur" de la solution a été menée. Pour cela, différents paramètres du code de calcul ont été modifiés :
 - l'enfoncement H_0 est bloqué tant que le résidu de l'équation de Reynolds n'atteint pas une valeur très faible : $r^h \leq 10^{-5}$. Ensuite, l'enfoncement est libéré en rétablissant l'équation d'équilibre de la charge avec un paramètre de sous-relaxation ω_{H_0} très faible pour perturber le moins possible l'équation de Reynolds.
 - les paramètres de sous-relaxation de l'équation de Reynolds, pour la relaxation Jacobi ω_{jac} et Gauss-Seidel ω_{gs} sont diminués : $0.1 \leq \omega_{jac} \leq 0.2$ et $0.2 \leq \omega_{jac} \leq 0.3$.

Ces méthodes n'ont pas apporté d'amélioration notable aux problèmes de convergence; la diver-

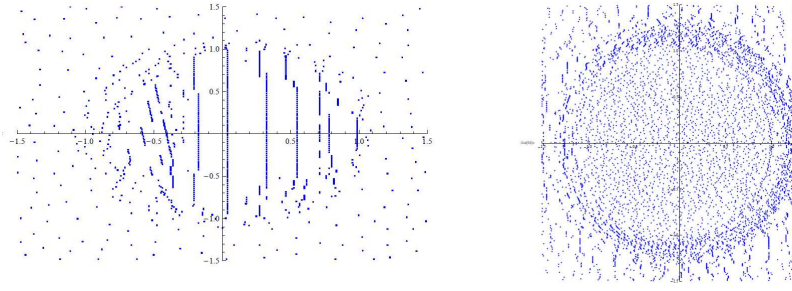


FIGURE A.1: *Couplage par MultiGrille algébrique pour des M de 100 et 10000 sur la grille grosse 16^2 et 64^2*

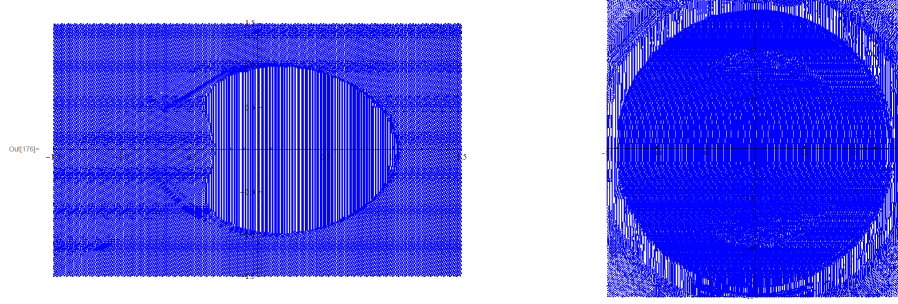


FIGURE A.2: *Couplage par MultiGrille algébrique pour des M de 100 et 10000 sur la grille fine 512^2 et 1024^2*

gence pouvant intervenir avant la libération de l'enfoncement H_0 et quel que soit le coefficient de sous-relaxation.

- À partir des résultats obtenus en créant un matériau viscoélastique totalement relaxé, le code de calcul semblant sur-corriger le problème, c-à-d percevant le module du matériau comme trop raide, un changement de l'adimensionnement de la déformation viscoélastique a été effectué. Pour cela, le module viscoélastique choisi dans le rayon de contact a est le module non relaxé : $E(t = 0) = K \cdot (f + 1)$, voir équation A.10. Le matériau est donc moins rigide que le cas élastique ; sa réponse sera donc plus souple que ce dernier. Ainsi le champ de pression d'Hertz classique est obtenu au démarrage du contact sphère/matériau viscoélastique. Ensuite l'amplitude du champ de pression diminue et son rayon de contact augmentent lorsque le matériau se relaxe.

$$a = \sqrt[3]{\frac{3wR_x}{2K'(f+1)}} \quad (\text{A.10})$$

où $K' = 2K/(1 - \nu^2)$.

Le paramètre de Moes est aussi modifié :

$$M = \frac{w}{K'(f+1)R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{K'(f+1)R_x} \right)^{-3/4} \quad (\text{A.11})$$

de même que la déformation viscoélastique :

$$U_v^h(t) = \frac{(f+1)U_e^h(t)}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right]} - \frac{\sum_i \left[\left[\frac{\frac{\tau_i}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] U_{e_i}^h(t - \Delta t) \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right]} + \frac{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{\frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right]}{\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right]} U_v^h(t - \Delta t) \quad (\text{A.12})$$

Le paramètre de relaxation multipliant $A_{i,k}^j$ a donc été modifié par : $\sum_i \left[\frac{K_i}{K} \left[\frac{1 + \frac{\tau_i(f+1)}{\Delta t}}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t}} \right] \right] \frac{1}{f+1}$

Cette technique appliquée simplement sur le code transitoire pour un matériau non-relaxé engendre une plus grande instabilité.

À partir de ce nouvel adimensionnement, la même méthode de démarrage a été appliquée avec un matériau totalement relaxé. Le fonctionnement est identique à l'autre adimensionnement, seul le domaine a dû être très agrandi du fait du rayon de contact très important. Cette solution n'a pas également amélioré les problèmes de convergence.

- Le calcul est très sensible à l'équilibre de la charge, cette équation doit être fortement sous-relaxée. Généralement le paramètre de sous-relaxation ω_{H_0} est compris entre 0.01 et 0.1 dans les cas élastiques alors qu'il faut souvent choisir entre 0.001 et 0.025 dans les cas viscoélastiques. L'équilibre de la charge varie très vite, ce qui rend instable la valeur de H_0 et fait diverger l'équation de Reynolds.
- Dans l'ensemble, la divergence s'effectue sur la grille fine lorsque le matériau est non-relaxé au début du calcul. Alors que cette divergence s'effectue sur les grilles grosses si le matériau est relaxé au début du calcul.

SOLUTION POSSIBLE AU PROBLÈME DE CONVERGENCE

- La solution du problème est asymptotique du fait des grandes valeurs du paramètre de charge M obtenues dans le contact pneu/route : $3000 < M < 300000$. La solution se rapproche fortement du champ de pression de Hertz comme montré dans la figure A.3 ; on y observe la différence entre la pression en EHL et la pression de Hertz en contact sec. Plus la valeur de M est élevée, moins de différence existe avec le cas sec. Il devient donc intéressant d'appliquer une résolution asymptotique [Kud13, Ven]. Ce type de solution présente l'avantage de converger rapidement dans cette zone limite de la solution. Il serait intéressant d'y appliquer la viscoélasticité et sûrement un adimensionnement permettant de travailler sous une forme de champ de pression de Hertz :

- adimensionné par rapport à la déformation au temps infini pour travailler avec un matériau totalement relaxé ;
- adimensionné par rapport à la déformation au temps initial pour travailler avec un matériau non relaxé ;
- adimensionné par rapport à la déformation obtenue à partir d'un cas de calcul sec viscoélastique.

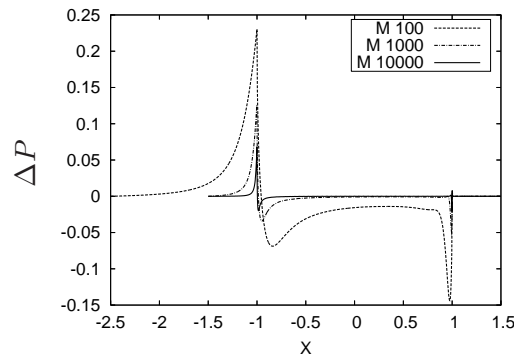


FIGURE A.3: ΔP pour différentes valeurs de M sur la ligne centrale en fonction de X .

- Une étude poussée sur le conditionnement du problème pourrait expliquer la divergence arrivant de manière très soudaine.

Annexe B

Comparaison des résultats du contact sec viscoélastique avec Greenwood

Cette annexe vise à comparer les résultats du code de calcul sec viscoélastique transitoire par Multigrille avec l'étude menée par Greenwood [Gre10].

Greenwood présente une nouvelle méthode visant à calculer le contact entre un indenteur axisymétrique et un massif semi-infini viscoélastique. Sa technique de calcul repose sur le principe de superposition des solutions. Ainsi le contact d'une sphère rigide est modélisé grâce à la superposition des solutions du contact d'un cylindre au rayon variable.

Le matériau viscoélastique adimensionné utilisé présente un rapport d'élasticité $E_0/E_\infty = 8$.

La charge sur la sphère oscille à une pulsation ω qui, multipliée par le temps de relaxation t du matériau, donne ωt , et varie entre 0.1 et 50.

- La première étude porte sur le rayon de contact pour un quart de période d'excitation, comme le montre la figure B.1.

La courbe la plus basse représente le matériau dont le produit ωt vaut 50. La fréquence d'excitation est trop basse pour que le matériau viscoélastique puisse se relaxer. Le rayon de contact est donc celui d'un matériau élastique dont le module vaut E_∞ . À l'inverse, la courbe la plus haute, représente le matériau dont le produit ωt vaut 0.1. La fréquence d'excitation est suffisamment importante pour que le matériau viscoélastique soit relaxé au maximum. Le rayon de contact est donc celui d'un matériau élastique dont le module vaut E_0 .

Entre ces deux comportements, on remarque que le rayon de contact maximum n'est plus centré, ce qui signifie que la viscoélasticité retarde l'enfoncement de la sphère par rapport à un matériau élastique dont le module serait E_0 .

Le matériau viscoélastique est adimensionné par rapport à son module E_0 , ce qui explique que le rayon de contact maximal est inférieur ou égal à 1.

Les courbes de Greenwood représentées en rouge, on remarque alors que le modèle de calcul utilisé pour cette étude s'accorde parfaitement avec les résultats de Greenwood.

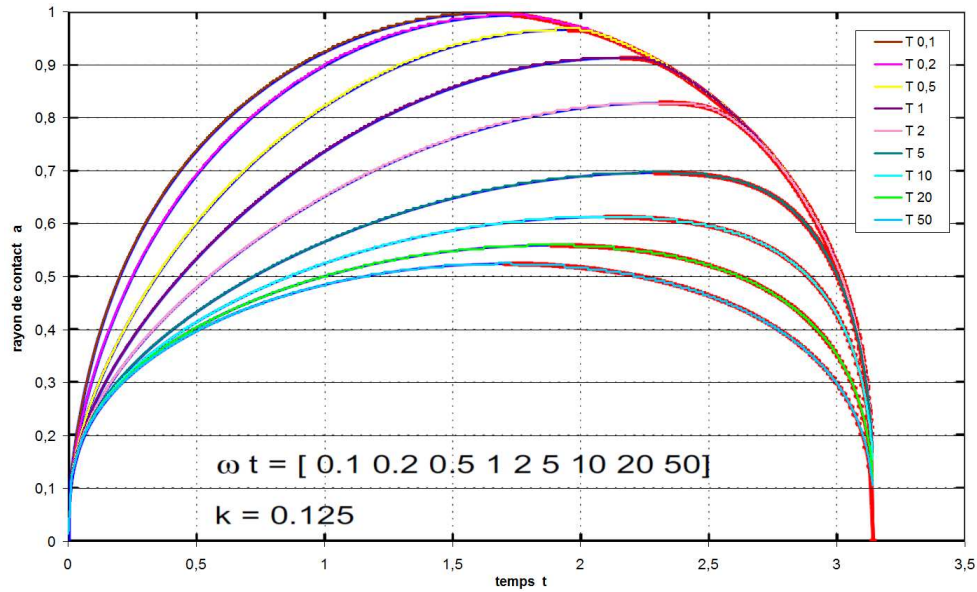


FIGURE B.1: Rayon de contact a en fonction du temps adimensionné sur une période t

- La seconde étude porte sur l'enfoncement de la sphère en fonction du temps comme représenté sur les figures B.2 et B.3.

La première figure montre l'enfoncement de la sphère pour trois cas du produit ωt . Au-delà du quart de la période d'excitation, la charge est supprimée. Sur cette partie de la courbe, on observe le phénomène de reprise de fluage qui permet au matériau de reprendre sa forme initiale. Les courbes de Greenwood (bleues et rouges, plus facilement visibles dans la figure B.3), sont très bien suivies par celles trouvées par le calcul de la présente étude. On peut mettre en évidence une légère différence juste après la suppression de la charge.

La seconde figure se concentre sur l'enfoncement du point central du massif semi-infini viscoélastique dans le cas où un champ de pression d'Hertz y est appliqué. Le calcul brut donne les courbes bleu ciel. En appliquant, sur l'ensemble de cette courbe, le rapport la séparant de la valeur maximale d'enfoncement dans le cas utilisant une sphère, on trouve exactement les mêmes résultats que Greenwood (voir courbes violettes).

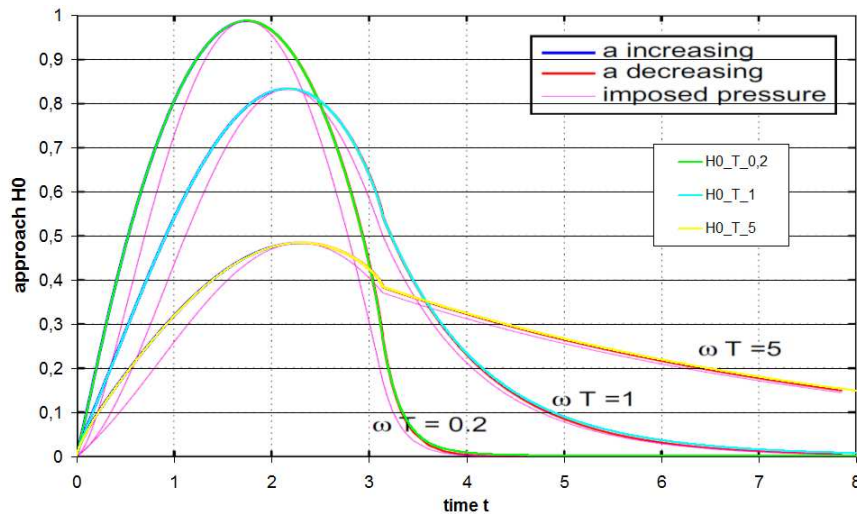


FIGURE B.2: Enfoncement de la sphère $H0$ en fonction du temps adimensionné sur une période t , comparaison à charge imposée

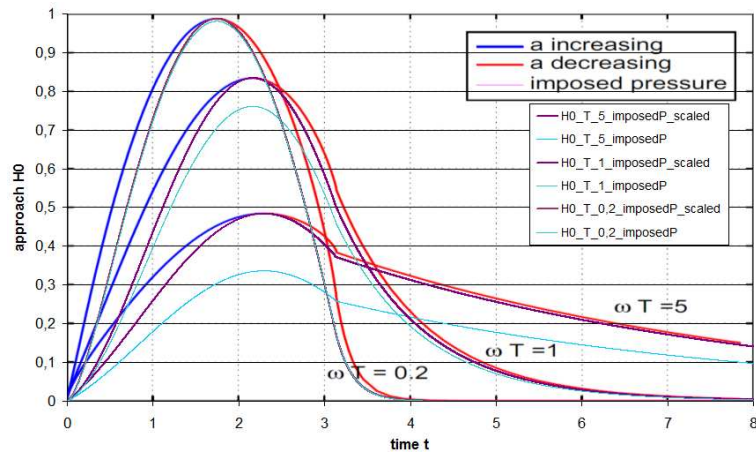


FIGURE B.3: *Enfoncement central du massif semi-infini $H0$ en fonction du temps adimensionné sur une période t , comparaison à pression imposée*

Annexe C

Relation entre les modèles de viscoélastiques de Maxwell et de Zener généralisés

Corrélation avec les séries de Prony

Les données matériau obtenues après essais sont souvent recalées avec des séries de Prony, dont l'équation donnant la module viscoélastique au cours du temps est :

$$G(t) = G_{\infty} + \sum_{i=1}^n G_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (\text{C.1})$$

où G_{∞} est la raideur du matériau pour un temps infini et $G(t)$ le module d'Young.

τ_i est le temps de relaxation de chaque branche i

G_i et τ_i étant le couple de paramètre pour chaque terme de la série de Prony.

Les données de la série de Prony sont directement reliées au modèle de Maxwell généralisé, voir figure C.1, où G_i est la raideur de chaque ressort i et le temps de relaxation est obtenu par $\tau_i = \eta_i / G_i$.

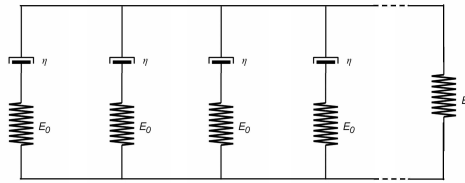


FIGURE C.1: Modèle de Maxwell généralisé

Les paramètres de la série de Prony doivent être corrélés avec ceux du modèle de Zener qui est utilisé dans l'étude, voir figure C.2.

Pour cela il faut vérifier que les deux équations peuvent se mettre sous la même forme, puisqu'elles décrivent la relaxation du matériau.

- En commençant pour un modèle de Zener simple, dont la solution pour une sollicitation en relaxation est donnée par la relation contrainte-déformation suivante, on trouve :

$$\sigma(t) = E_0 \left[\frac{E_1}{E_1 + E_0} + \frac{E_0}{E_1 + E_0} \exp \left(-\frac{E_1 + E_0}{\eta_1} t \right) \right] \cdot \epsilon(t) \quad (\text{C.2})$$

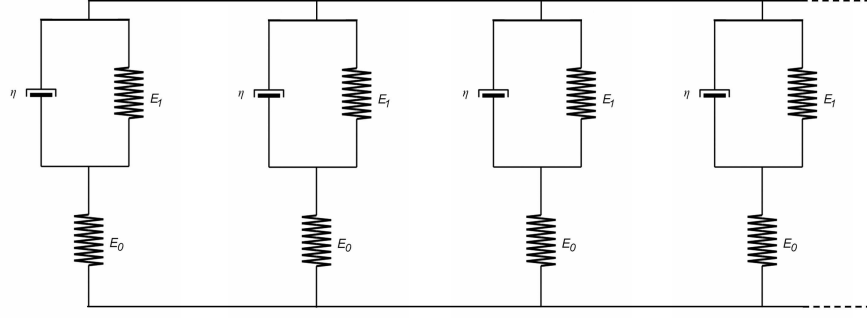


FIGURE C.2: *Modèle de Zener généralisé*

On en déduit le module de relaxation du matériau tel que $\sigma(t) = G_z(t)\epsilon(t)$, d'où :

$$G_z(t) = E_0 \left[\frac{E_1}{E_1 + E_0} + \frac{E_0}{E_1 + E_0} \exp\left(-\frac{E_1 + E_0}{\eta_1} t\right) \right] \quad (\text{C.3})$$

Pour un modèle généralisé (système en parallèle), on a alors :

$$G_z(t) = \sum_{i=1}^n G_{z_i}(t) = \sum_{i=1}^n E_{0i} \left[\frac{E_{1i}}{E_{1i} + E_{0i}} + \frac{E_{0i}}{E_{1i} + E_{0i}} \exp\left(-\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}} t\right) \right] \quad (\text{C.4})$$

i représentant une branche.

$$G_z(t) = \sum_{i=1}^n \left[E_{0i} \frac{E_{1i}}{E_{1i} + E_{0i}} \right] + \sum_{i=1}^n \left[\frac{E_{0i}^2}{E_{1i} + E_{0i}} \exp\left(-\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}} t\right) \right] \quad (\text{C.5})$$

En introduisant :

- $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_{1i} + E_{0i}}$, τ_i est le temps de relaxation de chaque branche ;
- $1/K_i = \frac{E_{1i} + E_{0i}}{E_{1i} E_{0i}}$, K_i est la raideur au temps infini de chaque branche ;
- $f = \frac{E_{0i}}{E_{1i}}$, $f + 1$ est le rapport entre le module viscoélastique instantané et au temps infini ;

on peut écrire l'équation sous une forme différente :

$$G_z(t) = \sum_{i=1}^n K_i + \sum_{i=1}^n \left[K_i f \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right] \quad (\text{C.6})$$

Sous forme fréquentielle, l'équation s'écrit à l'aide de deux modules :

- le module de stockage

$$G_s(\omega) = \frac{G_0}{(1 + f)} + f \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_i \tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \right] \quad (\text{C.7})$$

- le module de perte

$$G_l(\omega) = f \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_i \tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \right] \quad (\text{C.8})$$

- La série de Prony peut être adimensionnée par rapport au module instantané $G_0 = G(t = 0)$, donnant :

$$G(t) = G_0 \left(g_\infty + \sum_{i=1}^n g_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \right) \Rightarrow g(t) = g_\infty + \sum_{i=1}^n g_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (\text{C.9})$$

où $g_\infty = \frac{G_\infty}{G_0}$, $g_i = \frac{G_i}{G_0}$ et où g_∞ et g_i sont les paramètres adimensionnés

- Il faut maintenant vérifier que les 2 termes des 2 relations soient compatibles. À partir des équations C.5 et C.9, on doit vérifier que :

$$G_\infty = G_0 g_\infty = \sum_{i=1}^n \left[E_{0i} \frac{E_{1i}}{E_{1i} + E_{0i}} \right] \quad (\text{C.10})$$

et

$$G_0 \sum_{i=1}^n g_i e^{\left(\frac{-\tau}{\tau_i}\right)} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{E_{0i}^2}{E_{1i} + E_{0i}} \exp \left(-\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}} t \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

D'abord, $G_{z\infty}$ étant la raideur du matériau pour un temps infini, on trouve l'équivalence pour un modèle de Zener lorsque l'amortisseur n'influe plus sur le modèle. Le module équivalent est celui du modèle de Zener avec uniquement des ressorts :

$$G_{z\infty} = \sum_{i=1}^n \frac{E_{1i} E_{0i}}{E_{1i} + E_{0i}} \quad (\text{C.12})$$

On prouve donc que $G_{z\infty} = G_0 g_\infty = G_\infty$. Le premier terme de l'équation pour la corrélation est donc vrai.

Ensuite, à partir de l'équation C.11 :

$$G_0 \sum_{i=1}^n g_i e^{\left(\frac{-\tau}{\tau_i}\right)} = \sum_{i=1}^n G_i e^{\left(\frac{-\tau}{\tau_i}\right)} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{E_{0i}^2}{E_{1i} + E_{0i}} \exp \left(-\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}} t \right) \right] \quad (\text{C.13})$$

En posant $\frac{1}{\tau_i} = -\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}}$, on remarque que pour chaque i :

$$G_i = \frac{E_{0i}^2}{E_{1i} + E_{0i}} \quad (\text{C.14})$$

La 2^{nde} relation ayant été vérifiée, on peut donc mettre le modèle de Zener sous la même forme que la série de Prony pour chaque branche i .

- Il est possible maintenant de retrouver les valeurs du modèle de Zener.

À partir du modèle de Zener que l'on met sous la forme suivante :

$$G_z(t) = \sum_{i=1}^n E_{0i} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{1i} E_{0i}}{E_{1i} + E_{0i}}}{\sum_{i=1}^n E_{0i}} + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{0i}^2}{E_{1i} + E_{0i}} \exp \left(-\frac{E_{1i} + E_{0i}}{\eta_{1i}} t \right)}{\sum_{i=1}^n E_{0i}} \right] \quad (\text{C.15})$$

Puis avec une relation existante dans la série des Prony : $g_\infty = 1 - \sum_i g_i$, on a donc :

$$G(t) = G_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n g_i + \sum_{i=1}^n g_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \right) \quad (\text{C.16})$$

Il a été prouvé que les termes sont identiques entre la série de Prony et le modèle de Zener. De plus, $\sum_{i=1}^n E_{0_i} = G_0$ (car G_0 est la raideur du matériau à $t = 0$, on la retrouve pour le modèle de Zener en considérant l'amortisseur comme rigide), donc en faisant correspondre les deux premiers termes :

$$\begin{aligned} G_0(1 - \sum_i g_i) &= \sum_{i=1}^n E_{0_i} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{0_i} E_{1_i}}{E_{0_i} + E_{1_i}}}{\sum_{i=1}^n E_{0_i}} \right] \\ \Rightarrow 1 - \sum_i g_i &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{0_i} E_{1_i}}{E_{0_i} + E_{1_i}}}{G_0} \\ \Rightarrow G_0(1 - \sum_i g_i) &= \sum_{i=1}^n \frac{E_{0_i} E_{1_i}}{E_{0_i} + E_{1_i}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$(\text{C.18})$$

En posant comme précédemment $f = \frac{E_{0_i}}{E_{1_i}}$ il vient :

$$G_0(1 - \sum_i g_i) = \sum_{i=1}^n \frac{E_{0_i}}{f + 1} \quad (\text{C.19})$$

f étant constant sur toutes les branches :

$$1 - \sum_{i=1}^n g_i = \frac{1}{f + 1} \quad (\text{C.20})$$

On peut en déduire :

$$f = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n g_i} - 1 \quad (\text{C.21})$$

Ensuite, en faisant correspondre les 2 seconds termes pour chaque branche :

$$G_0 g_i = \frac{E_{0_i}^2}{E_{0_i} + E_{1_i}} = \frac{E_{0_i}}{1 + 1/f} \Rightarrow E_{0_i} = G_0 g_i \left(1 + \frac{1}{f} \right) \quad (\text{C.22})$$

Puis

$$E_{1_i} = \frac{E_{0_i}}{f} = \frac{G_0 g_i}{f} \left(1 + \frac{1}{f} \right) \quad (\text{C.23})$$

Enfin, on retrouve :

$$K_i = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0} = \frac{G_0 g_i \left(1 + \frac{1}{f} \right) \frac{G_0 g_i}{f} \left(1 + \frac{1}{f} \right)}{G_0 g_i \left(1 + \frac{1}{f} \right) \left(1 + \frac{1}{f} \right)} = \frac{G_0 g_i}{f} \quad (\text{C.24})$$

Passage Prony vers Zener

$$\begin{aligned}G_0 &= \sum_i E_{0_i} \\g_i &\Rightarrow f = \frac{1}{1 - \sum_i g_i} \\&\Rightarrow K_i = \frac{G_0 g_i}{f} \\\tau_i &= \tau_i\end{aligned}$$

Passage Zener vers Prony

$$\begin{aligned}f & \\ \sum_i K_i &= G_\infty \Rightarrow G_0 = G_\infty (f + 1) \\&\Rightarrow g_i = \frac{K_i f}{G_0} \\\tau_i &= \tau_i\end{aligned}$$

Table des figures

1.1	Composition du pneumatique d'un véhicule de tourisme	6
1.2	Cercle d'adhérence du pneumatique	7
1.3	Vue en coupe du pneumatique ayant un certain taux de glissement	7
1.4	Coefficient de frottement μ en fonction du taux de glissement G	8
1.5	Vue en coupe du phénomène d'adhérence par indentation	8
1.6	Vue en coupe du phénomène d'adhérence par adhésion	9
1.7	Relation contrainte-élongation de matériaux viscoélastique et élastique [BL07], où E_s est le module de stockage et η le facteur de perte.	10
1.8	Modules de stockage et de perte en MPa en fonction de la fréquence en Hz [WR09].	10
1.9	Représentation du pneumatique sur sol mouillé avec 2 zones de contact.	11
2.1	a) Distribution de pression de contact, b) Zoom sur l'indentation de la route sur le pain de gomme.	13
2.2	Modèles rhéologiques : a) Maxwell, b) Kelvin-Voigt, c) Zener	15
2.3	Modèle de Maxwell généralisé	15
2.4	Modèle de Zener généralisé	16
2.5	Géométrie et système de coordonnées du contact	17
2.6	Pression de contact de Hertz adimensionnée, géométrie déformée et non déformée pour $H_0 = -1$	19
2.7	Diagramme de flux d'un V-cycle pour un cas à 4 grilles [VL00b].	22
2.8	Schéma de principe de la restriction par injection.	23
2.9	Exemple d'interpolation dans le cas 1D.	23
2.10	Champ de pression P suivant la ligne $Y = 0$ en fonction du temps T	25
2.11	Coeff. de frottement μ , déformation maximale U_v et rayon de contact a en fonction du temps T	25
2.12	Champ de pression P ainsi que champ de déformation U_v	27
2.13	Champ de pression P suivant la ligne $Y = 0$ pour les cas élastique et viscoélastique	28
2.14	Rayon de contact a en fonction du temps t	28
2.15	Champ de pression P suivant $Y = 0$ pour les cas élastique et viscoélastique	29
3.1	Zone de contact d'un pneumatique sur une glace en verre : a) statique, b) à 96 km/h. [TR13]	33
3.2	Schéma de principe de la restriction par full-weighting en 1D [VL00b].	39
3.3	Résidu localisé pour un cas $M = 500$ et $f = 100$ avec un résidu normé total de $2 \cdot 10^{-3}$	40
3.4	Pression p (MPa) sur la ligne $y = 0$ mm pour le cas VEHD à $t = 1.10^{-6}s$ et $t = 5s$ et pour les cas EHD à $M = 217.2$ et $M = 324.79$	43
3.5	Hauteur de film h (mm) en échelle log sur la ligne $y = 0$ (mm) pour le cas VEHD à $t = 1.10^{-6}s$ et $t = 5s$ et pour les cas EHD à $M = 217.2$ et $M = 324.79$	43
3.6	Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps d'observation.	44
3.7	Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 20$	44

3.8	Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 1$.	45
3.9	Pression P sur la ligne $Y = 0$ pour différents temps de relaxation et au même nombre $D_e = 0.2$.	45
3.10	Pression P et différence de pression ΔP sur la ligne $Y = 0$ entre les cas de contact sec et VEHD.	46
3.11	Différence sur la ligne $Y = 0$ entre la déformation viscoélastique U_v des cas de contact sec et VEHD.	46
4.1	Exemple de mesure in-situ : (a) inverse de la topographie de surface ; (b) vue 3D de la hauteur de film en conditions de roulement pur ; (c) vue 3D de la hauteur de film en conditions de roulement-glissement. [SKH11]	51
4.2	Fluctuations de la hauteur de film et de la pression sur la ligne centrale $Y = 0$.	53
4.3	Distribution de la hauteur de film et de la pression en 3D.	53
4.4	Géométrie du contact en 2D pour $A_d/A_i = 0.5$.	53
4.5	A_d/A_i en fonction de ∇ en régime IE.	54
4.6	A_d/A_i en fonction de ∇ pour $M = 500$ en bas, $M = 1000$ et $M = 2000$ en haut.	54
4.7	A_d/A_i en fonction de $\bar{\nabla}$, courbe continue : équation 4.8.	55
4.8	Coefficient de frottement μ en fonction de $\bar{\nabla}$ pour un matériau à 1 branche	57
4.9	Coefficient de frottement μ en fonction de $\bar{\nabla}_2$ pour deux matériaux à 2 branches	57
4.10	Coefficient de frottement μ en fonction de $\tan\delta$ pour deux matériaux à 2 branches	57
5.1	a) DSP de la rugosité d'un pavé usé et de 2 pavés neufs ; b) DSP des sommets et des vallées de la rugosité d'un pavé usé [PAT ⁺ 05]	60
5.2	Fonction de corrélation de hauteur [WN07]	61
5.3	Fonction de corrélation de hauteur C_z en fonction de la longueur d'onde λ pour une surface en granite (gauche) et un asphalte (droite) [LGK08]	61
5.4	Coefficient de frottement en fonction du log de la vitesse de glissement en m/s pour du carbure de silicium et du verre, polis et rugueux. [Gro69]	62
5.5	Spectre de puissance de hauteur de la rugosité C en fonction de la fréquence q pour un asphalte sur sol sec et sur sol mouillé. [PTAT05]	64
5.6	Echantillon de surface neuve 1-2	66
5.7	Echantillon de surface usée 3-2	67
5.8	DSP (mm^4) en fonction de la pulsation q (mm^{-1}) du sol 1-2 et de 2 surfaces de Klüppel et al	67
5.9	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) des 8 échantillons du sol	68
5.10	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour a) sol neuf 1 – 2 et b) sol usé 3 – 3.	69
5.11	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) de 4 échantillons des sols, du sol discret de Yandell et du sol auto-affine de Klüppel	70
5.12	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) : trait fin pour le sol et trait épais pour la déformation	71
5.13	Rapport entre la DSP de la déformation de la gomme et celle du sol en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1})	72
5.14	Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol neuf 1-2	72
5.15	Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol usé 3-4	73
5.16	Taux de contact en fonction de la charge (N) pour les 8 échantillons de sol	73
5.17	Raideur ($N/\mu m$) de contact en fonction de la charge (N) pour les 8 échantillons de sol	74

5.18	Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) des 8 échantillons du sol . . .	75
5.19	Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) du sol 1-1 et des sommets en contact	75
5.20	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) : trait continu pour le cas élastique et tiret pour le cas viscoélastique	77
5.21	Distribution de hauteur en fonction de la hauteur (m) pour le sol 1-2 : comparaison d'un contact élastique à deux cas viscoélastiques	77
5.22	Différence relative de la hauteur de film minimale H_{min} et au centre du contact H_c par rapport au cas élastique pour différents temps de relaxation τ (s)	79
5.23	Hauteur du film d'eau h (mm) dans un contact lisse en fonction de la vitesse de glissement Vg (m/s)	79
5.24	FFT du sol H 1-2 et des sommets en contact avec la gomme V (mm) en fonction de q (mm^{-1})	80
5.25	Coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse d'entraînement u_s (m/s)	82
5.26	Réduction d'amplitude A_d/A_i et rapport de hauteur de rugosité sur épaisseur de film de fluide a_i/hc en fonction de la vitesse d'entraînement u_s (m/s)	82
5.27	Hauteur du film de fluide (mm) en fonction de X (mm) le long de la ligne centrale .	83
5.28	DSP (mm^4) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour le sol 1-2 et deux types de filtration	85
5.29	DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 et en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement Vg	86
5.30	DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré de la surface 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement Vg	86
5.31	Amplitude de la déformation (mm) de la surface 1-2 d'origine et filtrée pour différentes vitesses de glissement " Vg " (m/s) suivant la ligne X (mm)	87
5.32	Amplitude de la déformation (mm) de la surface 1-2 d'origine et filtrée pour différentes vitesses de glissement " Vg " (m/s) suivant la ligne X (mm)	87
5.33	Coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s)	88
5.34	Différence relative du coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s)	88
5.35	Coefficient de frottement μ sec et lubrifié en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s)	88
5.36	Module de perte G'' (MPa) en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement " Vg " (m/s)	89
5.37	Coefficient de frottement μ et sa différence relative $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s)	90
5.38	Différence relative du coefficient de frottement entre le cas sec et mouillé $\Delta\mu$ en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) avec et sans <i>cut-off</i>	91
5.39	$ E^* $ et $\tan \delta$ du matériau de Le Gal [LGYK05] et d'un matériau recalé en fonction de la fréquence (Hz)	91
5.40	Différence relative du coefficient de frottement $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) avec et sans <i>cut-off</i> pour 2 matériaux	92
5.41	DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes vitesses de glissement Vg et pour deux conditions de contact	92
5.42	Coefficient de frottement μ et sa différence relative $\Delta\mu$ entre le cas sec et mouillé en fonction de la vitesse de glissement Vg (mm/s) pour deux conditions de contact . .	93
5.43	DSP (mm^4) du spectre d'origine et filtré des sommets 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour différentes charges w	94

5.44	Réduction d'amplitude $1 - A_d/A_i$ en fonction du vecteur d'onde q (mm) pour différentes charges w sur la déformée 1-2	94
5.45	Différence relative entre le coefficient de frottement d'origine et filtré de la surface 1-2 en fonction de la charge w	95
5.46	Adhérence du pneumatique en fonction du temps [PTAT05]	95
5.47	DSP (mm^4) du spectre de la surface 1-2 en fonction du vecteur d'onde q (mm^{-1}) pour le sol 1-2 et la filtration pour différentes viscosités (MPa.s)	96
5.48	Différence relative du coefficient de frottement en fonction de la viscosité de l'eau par rapport à celle à 20°C	97
5.49	Champ de pression P (MPa) en fonction des coordonnées X et Y (μm) pour le sol 1-2	98
5.50	Réduction d'amplitude $1 - A_d/A_i$ en fonction du vecteur d'onde q (mm) pour le sol 1-2	98
5.51	Amplitude du module viscoélastique $ E^* $ (Pa) et facteur de perte $\tan \delta$ en fonction de la fréquence (Hz)	100
A.1	Couplage par MultiGrille algébrique pour des M de 100 et 10000 sur la grille grosse 16^2 et 64^2	119
A.2	Couplage par MultiGrille algébrique pour des M de 100 et 10000 sur la grille fine 512^2 et 1024^2	119
A.3	ΔP pour différentes valeurs de M sur la ligne centrale en fonction de X	120
B.1	Rayon de contact a en fonction du temps adimensionné sur une période t	122
B.2	Enfoncement de la sphère $H0$ en fonction du temps adimensionné sur une période t , comparaison à charge imposée	122
B.3	Enfoncement central du massif semi-infini $H0$ en fonction du temps adimensionné sur une période t , comparaison à pression imposée	123
C.1	Modèle de Maxwell généralisé	125
C.2	Modèle de Zener généralisé	126

Liste des tableaux

2.1	<i>Caractéristiques du matériau utilisé.</i>	24
3.1	<i>Régimes des solutions EHD [VL00b].</i>	35
3.2	<i>Paramètres d'entrée des calculs EHD et VEHD.</i>	43
3.3	<i>Paramètres d'entrée des calculs sec et VEHD.</i>	46
5.1	<i>Amplitude (mm) en fonction de la longueur d'onde (mm) pour chaque échelle du sol mesuré par Yandell et al [YG75].</i>	60
5.2	<i>Caractéristiques des 8 échantillons mesurés.</i>	69
5.3	<i>Paramètres de contact pour les calculs.</i>	71
5.4	<i>Caractéristiques des 8 déformations calculées.</i>	74
5.5	<i>Caractéristiques du S-SBR renforcé de noir de carbone à 0.5% d'élongation à 21°C [LGYK05].</i>	76
5.6	<i>Taux de SRR (%) en fonction de la vitesse de glissement (m/s) et de la vitesse du véhicule (km/h).</i>	85
5.7	<i>Viscosité de l'eau en fonction de la température à la pression atmosphérique.</i>	96
5.8	<i>Fréquence d'excitation en fonction de la vitesse de glissement pour différents vecteurs d'onde du sol $q \text{ mm}^{-1}$.</i>	100

